Instituto de Física
Universidade Federal Fluminense

Física IV

Instrutor: Prof. Daniel Jonathan

Sala: A3-17 (IF, andar 1P)

Email: jonathan@if.uff.br

Site do curso: http://cursos.if.uff.br/fisicaIV_XXI_0214/

Calendário -2p14

	Seg.	Ter.	Qua.	Qui	Sex	Sab.
Agosto	4	5	6	7	8	
	11	12	13	14	15	
	18	19	20	21	22	
	25	26	27	28	29	
Setembro	1	2	3	4	5	P1 06
	8	9	10	11	12	
	15	16	17	18	19	
	22	23	24	25	26	
	29	30				
Outubro			1	2	3	
	6	7	8	9	10	
	13 SNCT	14 SNCT	15 SNCT	16 SNCT	17 SNCT	
	20	21	22	23	24	P2 25
	27	28	29	30	31	
Novembro	3	4	5	6	7	
	10	11	12	13	14	
	17	18	19	20 Feriado	21 ress.	
	24	25	26	27	28	P3 29
Dezembro	1 V.R.	2 V.R.	3 V.R.	4 V.R.	5 V.R.	VS 06
	8	9	10	11	12	
	15	16	17	18	19	

SNCT = Semana Nacional de Ciência e Tecnologia – sem aulas

tópicos

- Relatividade
- O fim da física clássica
- Quantização
- Revisão

- Funções de onda e incerteza
- Mecânica Quântica Unidimensional
- Física atômica
- Revisão

- Condução elétrica nos sólidos
- Física nuclear
- Revisão

P1: 06/Setembro 14:15~16:15
P2: 25/Outubro 14:15~16:15
P3: 29/Novembro 14:15~16:15
VR: 01 a 05/dezembro 14:15~16:15
VS: 06/Dezembro 14:15~16:15

Período Letivo:
04/agosto de 2014: início
12/dezembro de 2014: Fim

Física IV

Livro-texto principal:

"Física, uma abordagem estratégica", vol. 4
Randall.L. Knight

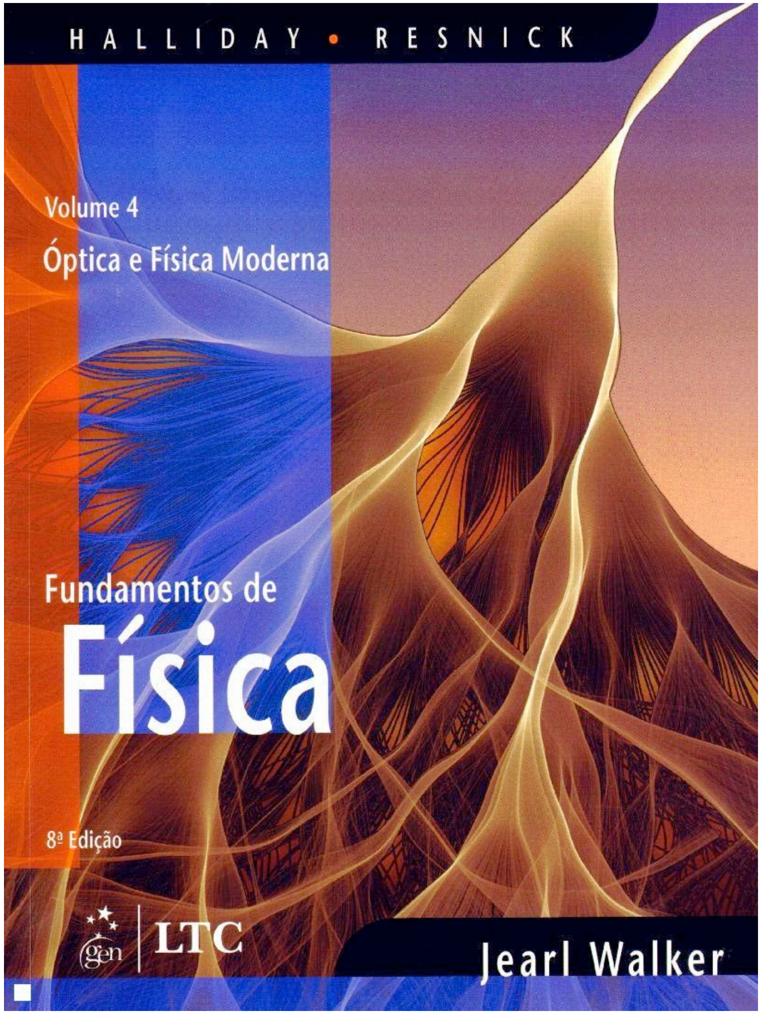
Caps. 37 – 43

Física IV

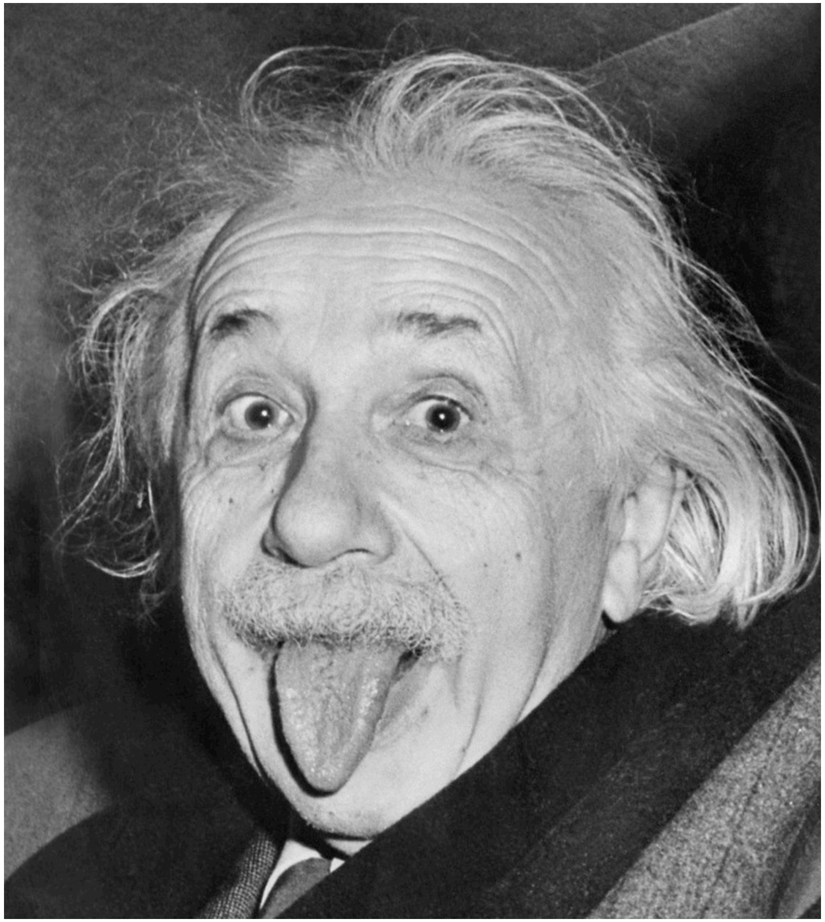
Livro-texto secundário: usaremos para parte do conteúdo da P3

"Fundamentos de Física, vol. 4", 8a ed. Halliday, Resnick e Walker

caps. 41 e 43



Relatividade



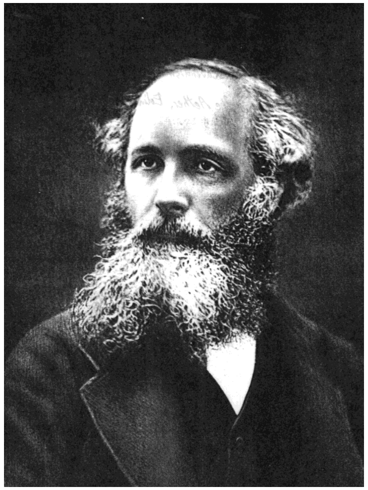
A. Einstein (1879 – 1955)

Relatividade

A. Einstein em 1905, aos 26 anos

G. Galilei

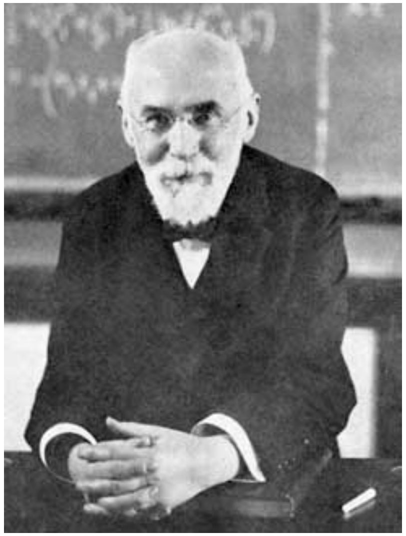
I. Newton



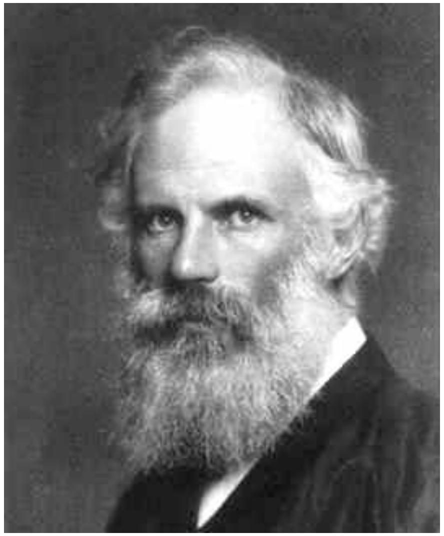
J.C. Maxwell

Outros personagens dessa história

Poincaré

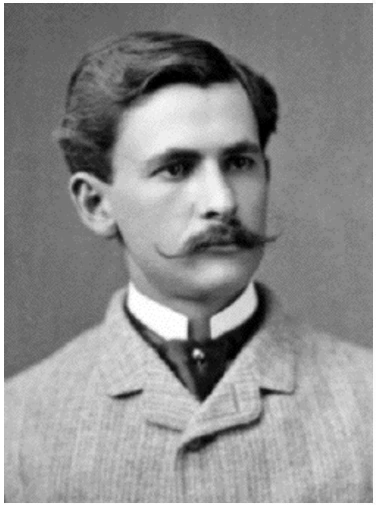


Lorentz

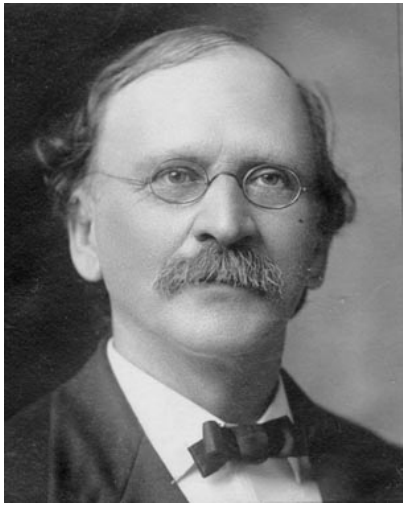


FitzGerald

Minkowski



Michelson



Morley

A Relatividade de Galileu

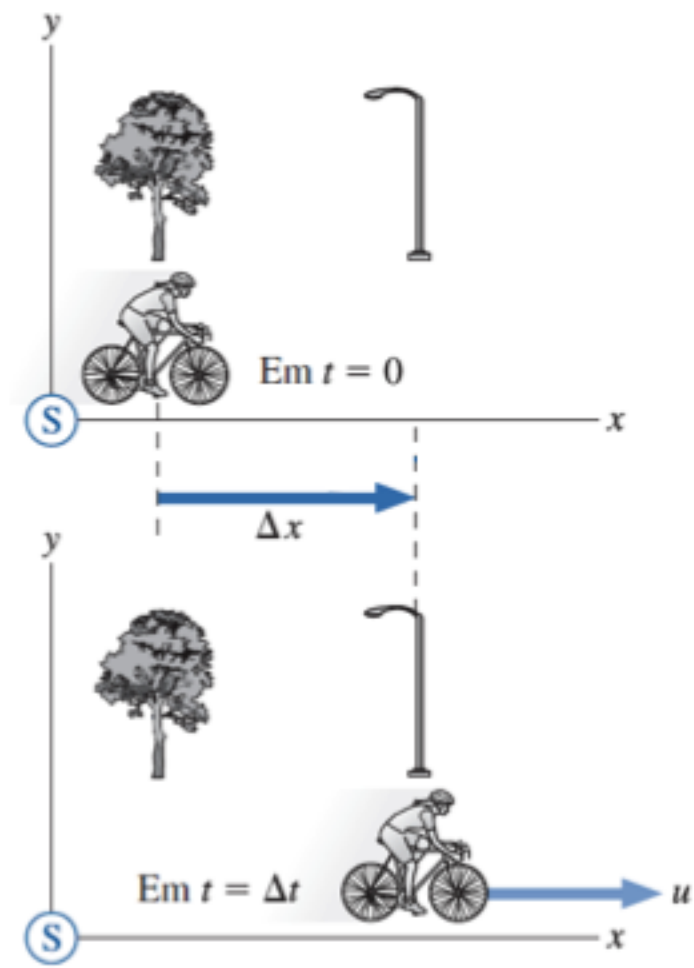
- **O princípio da relatividade de Galileu Galilei é descrito em seu livro "Diálogos sobre dois sistemas máximos do mundo" (1632).**
- **Em certo ponto, os personagens discutem se uma pessoa em uma cabine fechada de um navio em movimento é ou não capaz de perceber este movimento pela observação do comportamento de pêndulos, molas ou outros sistemas mecânicos.**

"...(desde que o movimento seja uniforme e não flutuante para um lado e para outro) você não perceberá a menor modificação dos efeitos mencionados, e nem de algum deles poderá concluir se o navio se move ou está parado ..."

Em outras palavras: a velocidade de um objeto não é absoluta, mas relativa a um referencial

Referenciais

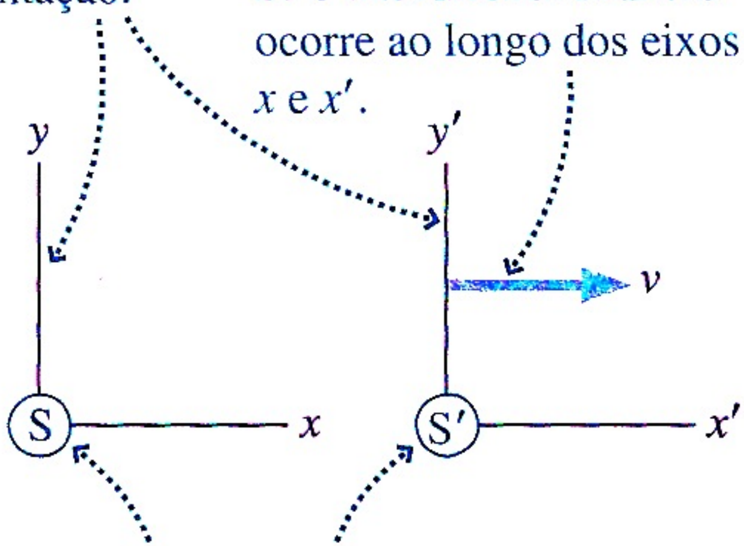
Referencial: sistema de coordenadas em que observadores em repouso medem as posições e o tempo de objetos em movimento



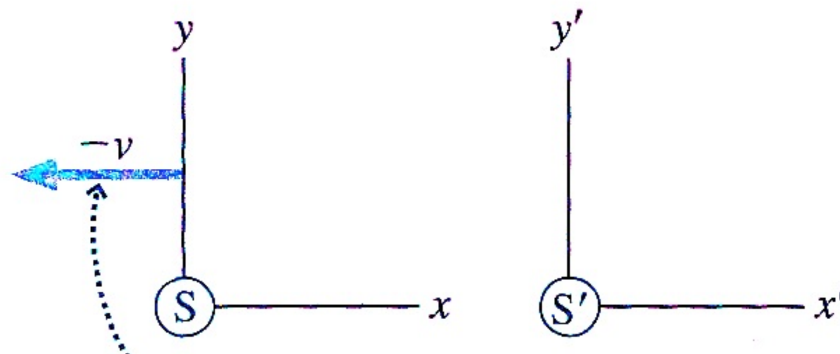
Referenciais

1. Os eixos de S e S′ têm a mesma orientação.

2. O referencial S′ move-se com velocidade v em relação ao referencial S. O movimento relativo ocorre ao longo dos eixos x e x'.



3. As origens de S e S′ coincidem no instante $t = 0$. Essa é a nossa definição de $t = 0$.



4. O referencial S move-se com velocidade $-v$ em relação ao referencial S′.

Relatividade de Galileu, versão Newton

1a Lei: existem *referenciais inerciais*, nos quais um corpo que não sofre forças se move com vel. constante

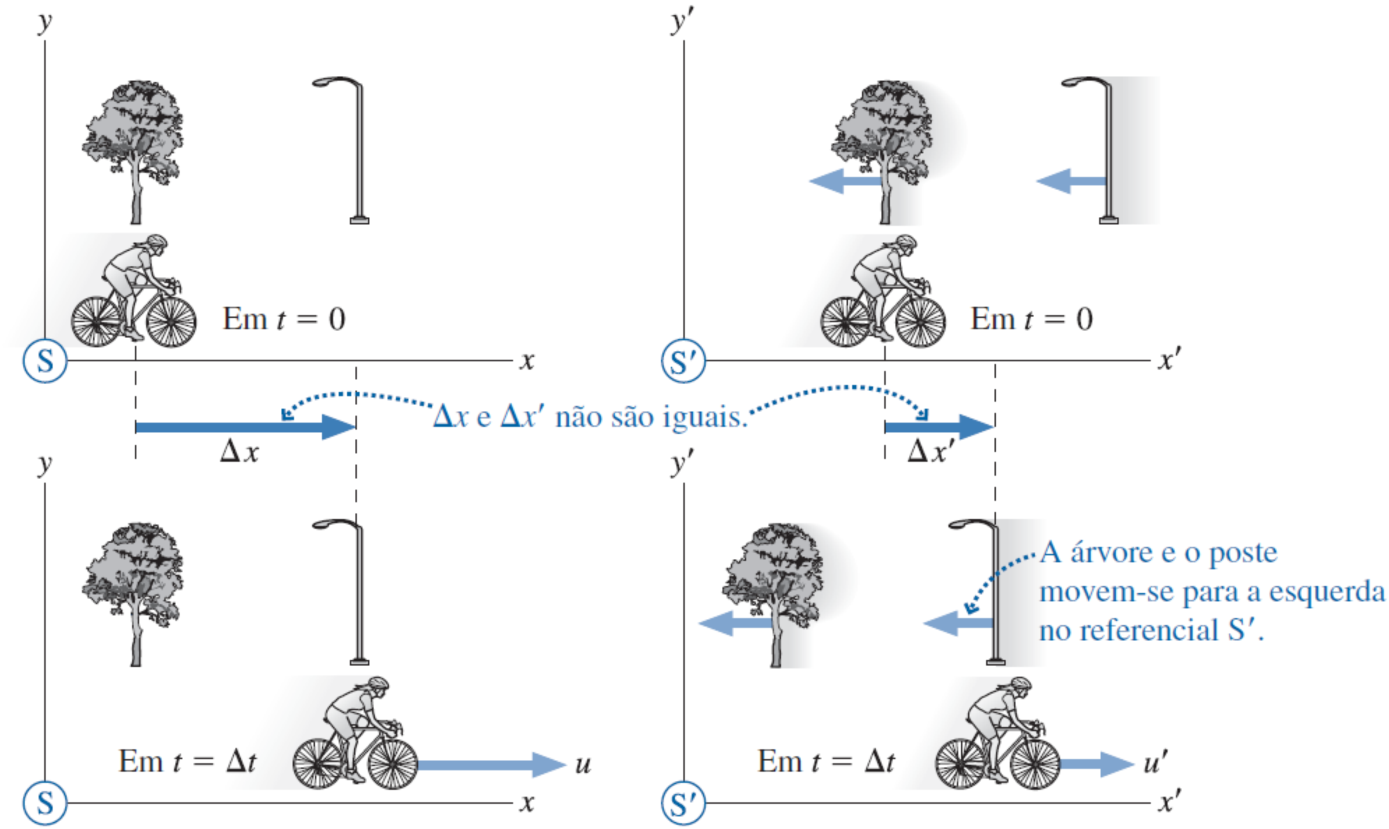
2a Lei: Em relação a um ref. inercial, vale que

$$\vec{F}_{result} = m\vec{a}$$

O Princípio da Relatividade de Galileu, versão de Newton:

"As leis da mecânica são iguais em relação a qualquer referencial inercial"

Transformações de Galileu



$$x = x' + vt$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v = u'_x + v$$

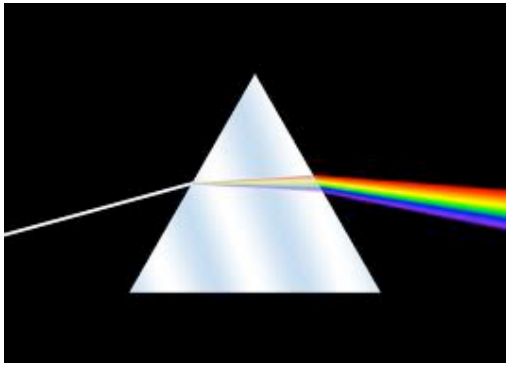
$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u'_y$$

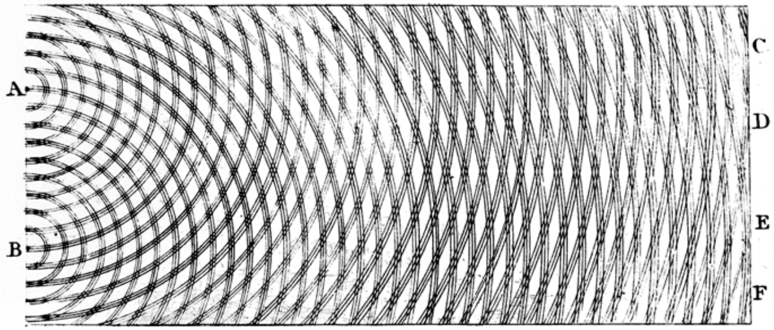
$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = u'_z$$

E a luz?

Newton: acreditava na teoria de que a luz era feita de *partículas.*

No início do séc XIX: descobre-se que a luz é uma *onda,* pois sofre difração, interferência etc.





Meados do séc XIX: eqs de Maxwell descrevem todos os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos (unificação).

Prevêem que a luz é de fato uma onda que se desloca com velocidade

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3,0 \times 10^8 m/s = 300 m/\mu s}$$

A pergunta porém é: com relação a que?

O Drama da Física Clássica

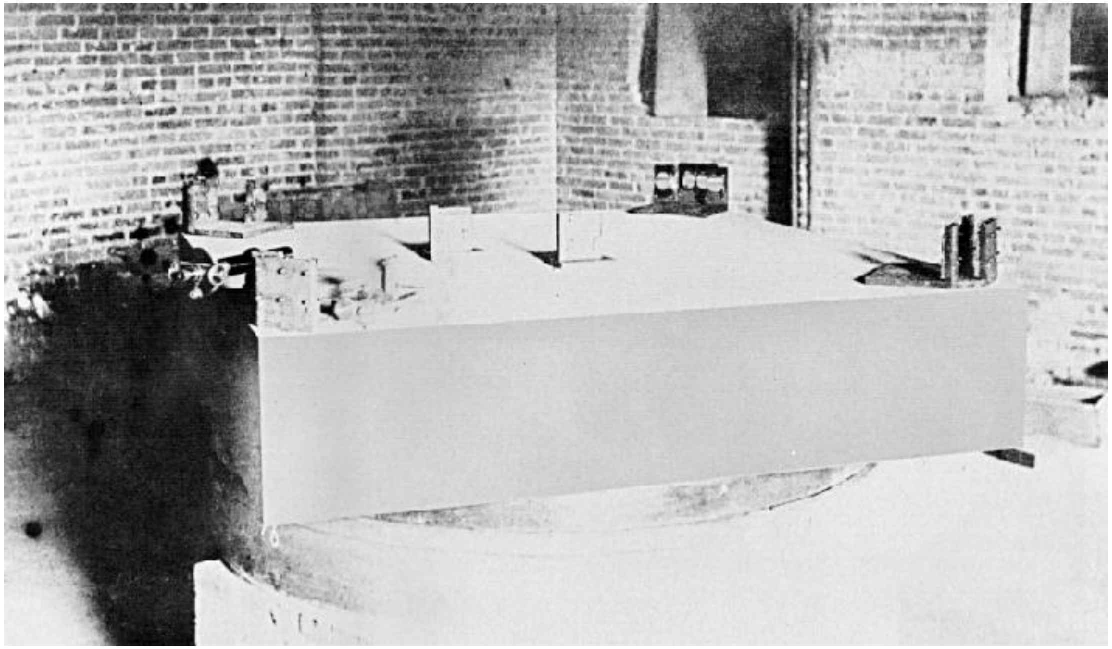
Problema com a versão ondulatória: uma onda precisaria de um meio para se propagar. Surge a hipótese do ÉTER...

Propriedades estranhas: rígido (para que a luz tenha a velocidade altissima que tem) mas passa por dentro de materiais transparentes !

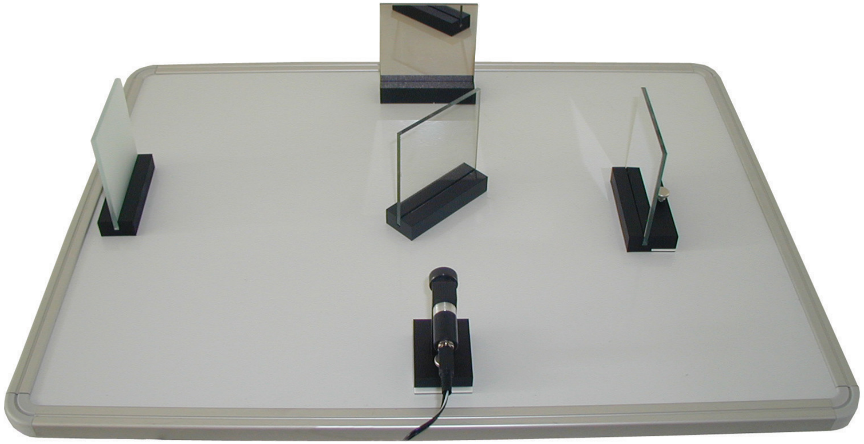
A busca do éter se torna um dos grandes problemas experimentais e teóricos do final do século XIX.

Ideia para testar a hipótese do éter: Caso ele existisse, o movimento da Terra em relação a ele provocaria um "vento", o que mudaria a velocidade da luz na direção do movimento da Terra, com respeito àquela na direção transversal.

Teste experiemental feito por Michelson e Morley usando um *interferômetro*:

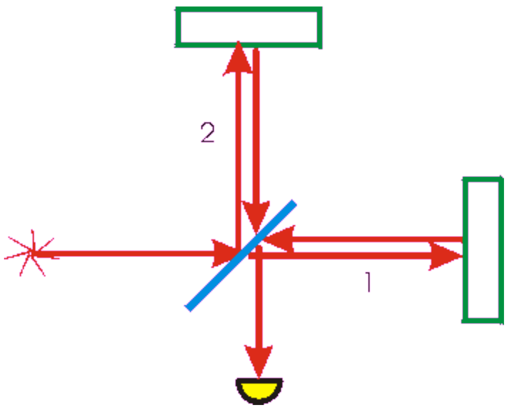


Versão moderna do interferômetro de MM.



Esquema simplificado do que acontece

Interferência construtiva ou destrutiva dos dois feixes leva a aparecerem zonas claras e escuras ('franjas') no detector



Caso existisse um éter, as franjas de interferência mudariam de posição ao longo do ano.

Resultado experimental: nenhuma alteração

O artigo de Einstein (1905)

"Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento"
Annalen der Physik. 1905 v. 17

Publicado junto a dois outros artigos: movimento browniano e efeito fotoelétrico (por este último Einstein ganhou o Nobel)

3. *Zur Elektrodynamik bewegter Körper;* *von A. Einstein.*

Daß die Elektrodynamik Maxwells — wie dieselbe gegenwärtig aufgefaßt zu werden pflegt — in ihrer Anwendung auf bewegte Körper zu Asymmetrien führt, welche den Phänomenen nicht anzuhaften scheinen, ist bekannt. Man denke z. B. an die elektrodynamische Wechselwirkung zwischen einem Magneten und einem Leiter. Das beobachtbare Phänomen hängt hier nur ab von der Relativbewegung von Leiter und Magnet, während nach der üblichen Auffassung die beiden Fälle, daß der eine oder der andere dieser Körper der bewegte sei, streng voneinander zu trennen sind. Bewegt sich nämlich der Magnet und ruht der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten ein elektrisches Feld von gewissem Energiewerte, welches an den Orten, wo sich Teile des Leiters befinden, einen Strom erzeugt. Ruht aber der Magnet und bewegt sich der Leiter, so entsteht in der Umgebung des Magneten kein elektrisches Feld, dagegen im Leiter eine elektromotorische Kraft, welcher an sich keine Energie entspricht, die aber — Gleichheit der Relativbewegung bei den beiden ins Auge gefaßten Fällen vorausgesetzt — zu elektrischen Strömen von derselben Größe und demselben Verlaufe Veranlassung gibt, wie im ersten Falle die elektrischen Kräfte.

Beispiele ähnlicher Art, sowie die mißlungenen Versuche, eine Bewegung der Erde relativ zum „Lichtmedium" zu konstatieren, führen zu der Vermutung, daß dem Begriffe der absoluten Ruhe nicht nur in der Mechanik, sondern auch in der Elektrodynamik keine Eigenschaften der Erscheinungen entsprechen, sondern daß vielmehr für alle Koordinatensysteme, für welche die mechanischen Gleichungen gelten, auch die gleichen elektrodynamischen und optischen Gesetze gelten, wie dies für die Größen erster Ordnung bereits erwiesen ist. Wir wollen diese Vermutung (deren Inhalt im folgenden „Prinzip der Relativität" genannt werden wird) zur Voraussetzung erheben und außerdem die mit ihm nur scheinbar unverträgliche

A Relatividade de Einstein

A solução proposta por Einstein é simples à primeira vista: estender o princípio de Galileu para *todos* os fenômenos físicos, ie, não apenas os mecânicos mas também os eletromagnéticos

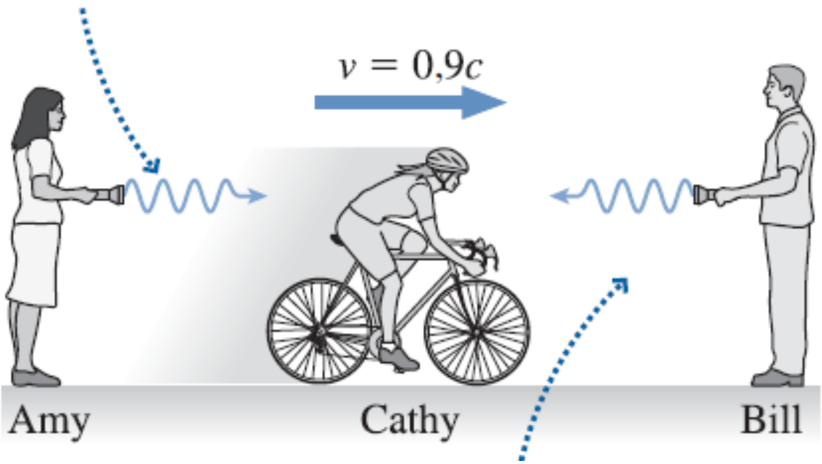
O Princípio da Relatividade de Einstein:

"Todas as leis da Física são iguais em relação a qualquer referencial inercial"

A constância da velocidade da Luz

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3,0 \times 10^8 m/s = 300 m/\mu s$$

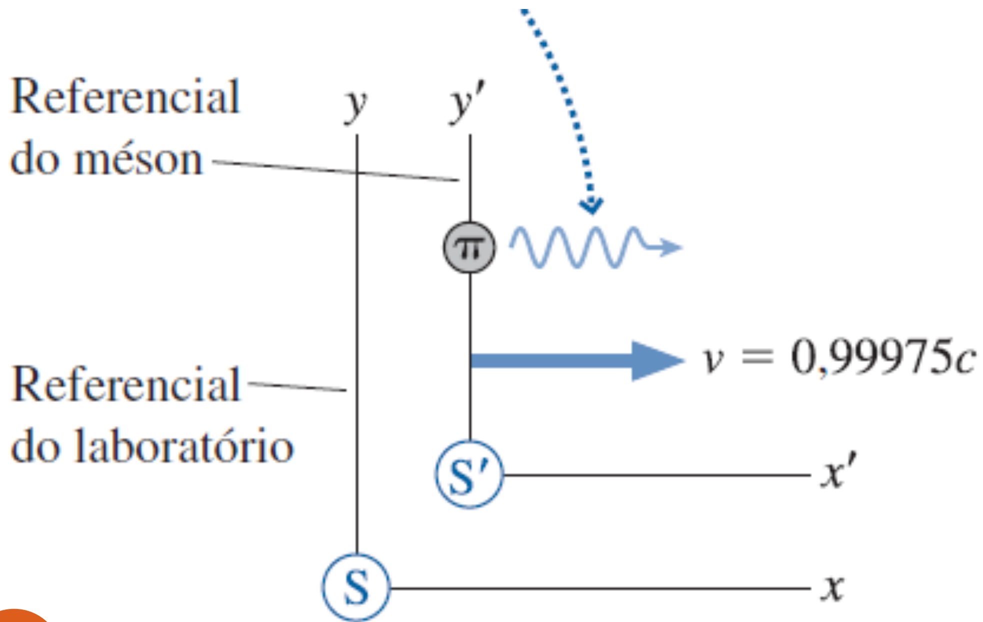
1. Pelo Princípio da Relatividade, as equações de Maxwell valem em todos os referenciais inerciais.
2. As equações de Maxwell prevêem que as ondas eletromagnéticas, inclusive a luz, se propagam com velocidade ***c***
3. Portanto, a luz se propaga com velocidade ***c*** em relação a todos os referenciais inerciais!!



Cathy também tem de ver tanto a luz vinda de Bill quanto a vinda de Amy se propagando com velocidade *c* !

Evidência experimental !

Um tipo de partícula elementar chamada méson π pode ser gerado em laboratório (acelerador de partículas) viajando a velocidades altíssimas, p/ ex. v = 0.99975*c*. Essas partículas decaem, emitindo um fóton de alta energia. No referencial do méson, o fóton viaja com velocidade *c*.



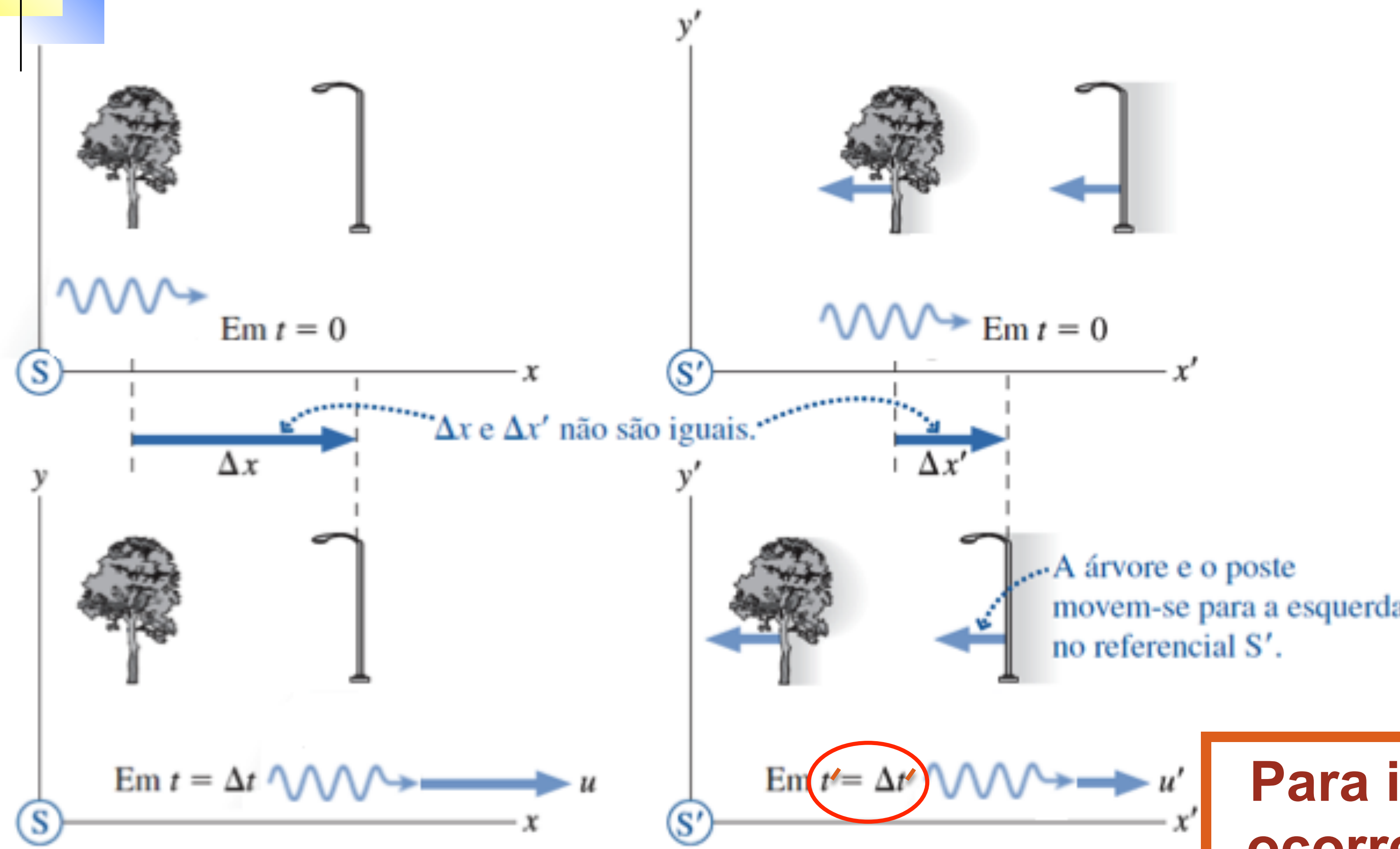
Pelo senso comum, deveríamos medir a velocidade do fóton no ref. do lab. como

u = 1,99975 c.

Mas as medidas mostram que ela continua igual a

$u = 3 \times 10^8$ m/s = c !!

Como isto é possível?



Por Galileu:
$u' = \Delta x'/\Delta t \neq u = \Delta x/\Delta t$

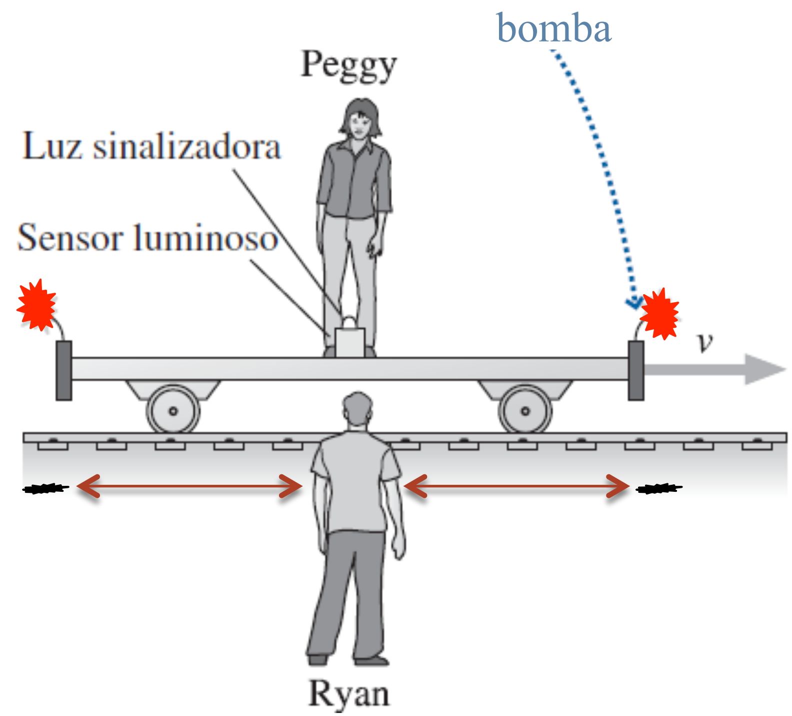
Mas se ao invés da bicicleta temos um raio de luz:
$u' = u = c$!!

Para isso ocorrer, é preciso $\Delta t' \neq \Delta t$ (!!?)

A relatividade da simultaneidade

Situação hipotética:

- Peggy está num vagão que passa por Ryan
- Bombas explodem em cada ponta do vagão
- Ryan percebe *simultaneamente* a luz das duas explosões. Ele também observa que as marcas deixadas no solo pelas explosões estão à mesma distância dele.



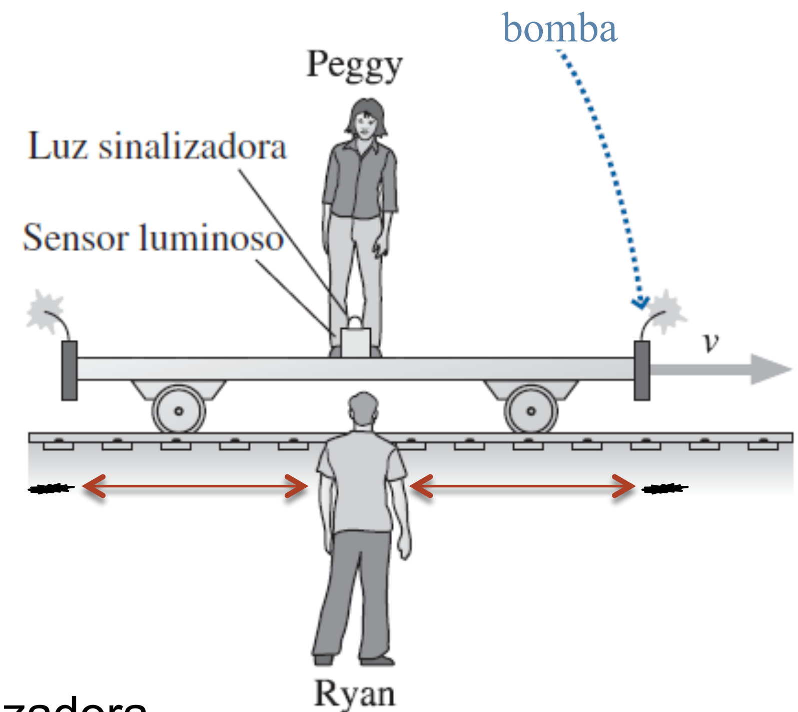
Conclusão de Ryan: as bombas **explodiram simultaneamente**

P: será que Peggy concorda?

A relatividade da simultaneidade

Situação hipotética:

- Peggy está num vagão que passa por Ryan
- Bombas explodem em cada ponta do vagão
- Ryan percebe *simultaneamente* a luz das duas explosões. Ele também observa que as marcas deixadas no solo pelas explosões estão à mesma distância dele.



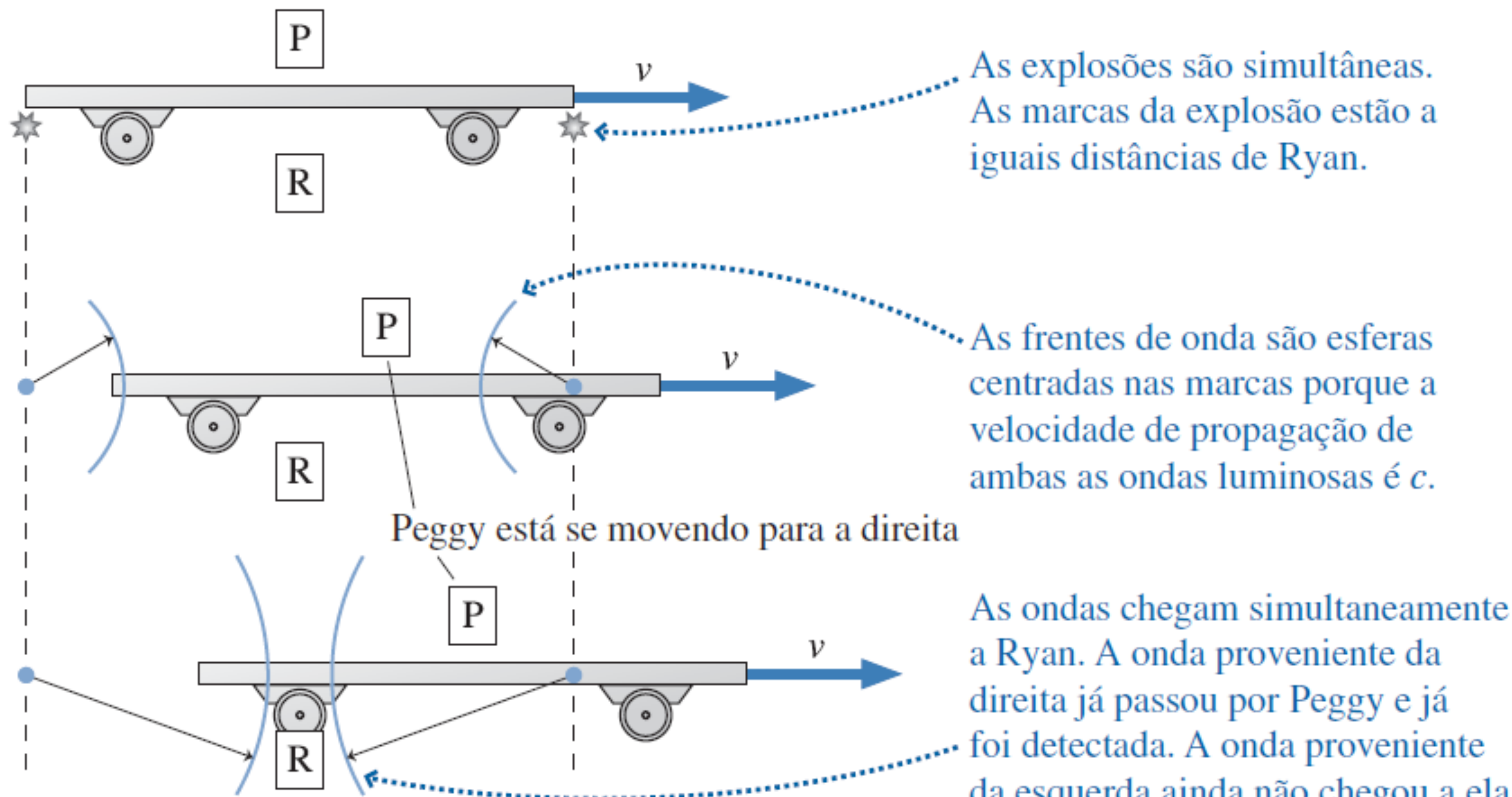
Peggy possui um sensor ligado a uma luz sinalizadora

1. Se o sensor detecta o flash vindo da direita antes do vindo da esquerda: LUZ VERDE
2. Se o sensor detecta o flash vindo da esquerda antes do vindo da direita ou se chegarem simultaneamente: LUZ VERMELHA

Qual luz acende?

A relatividade da simultaneidade

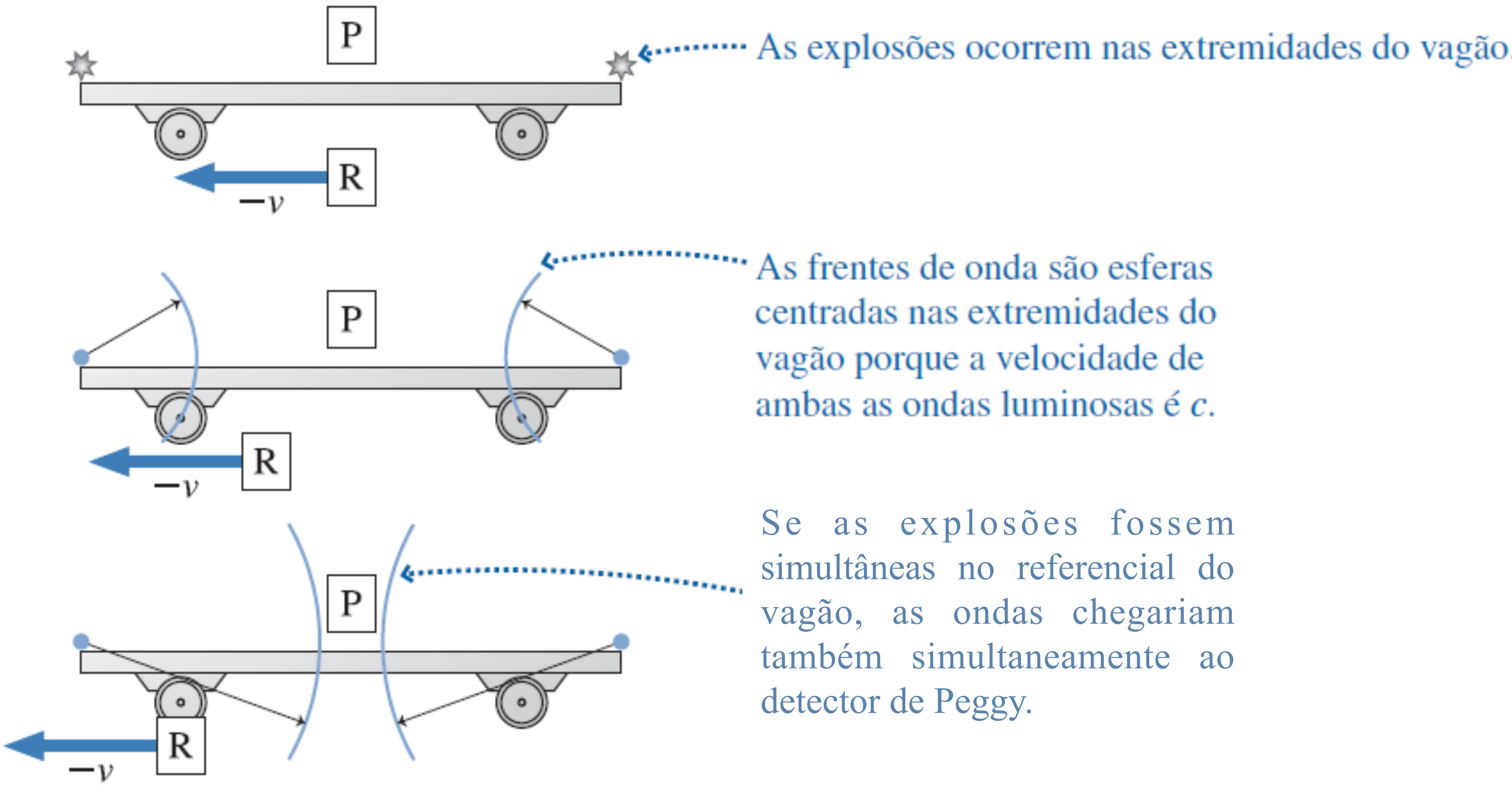
Descrição no referencial parado na terra (Ryan)



Ryan conclui que a luz VERDE acenderá – que é o que ocorre.

A relatividade da simultaneidade

E se as explosões fossem simultâneas para Peggy?

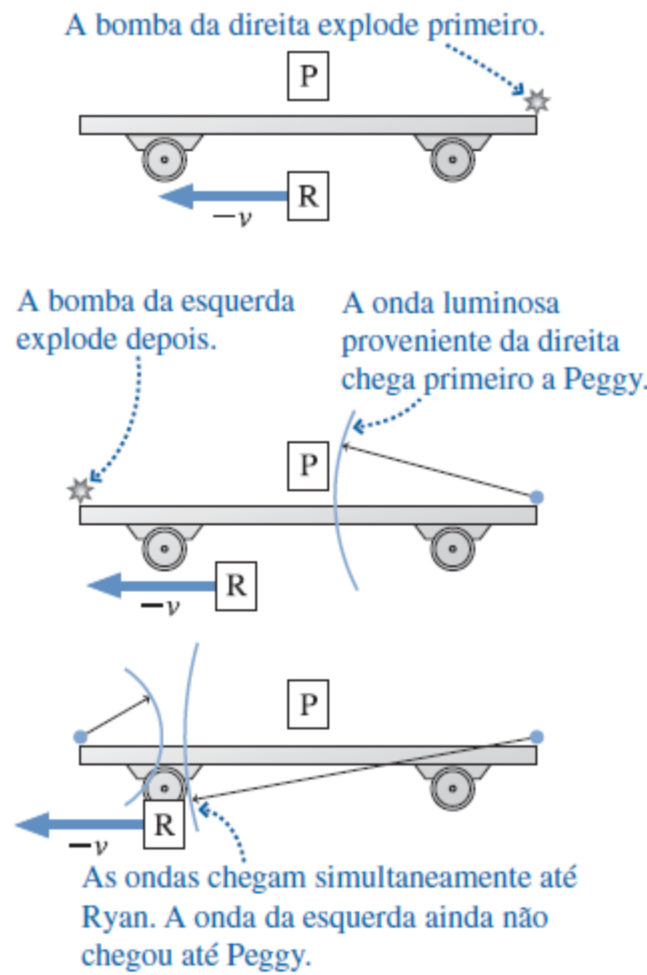


Se as explosões fossem simultâneas para Peggy, a luz VERMELHA acenderia. Mas não é isso que ocorre!

A relatividade da simultaneidade

Descrição correta no referencial de Peggy: como a Luz VERDE acende

A bomba da direita tem de ter explodido primeiro!!



CONCLUSÃO

Dois eventos que ocorrem simultaneamente em um referencial S ***não*** são em geral simultâneos em outro referencial S' em movimento relativo a S.

A simultaneidade é relativa

Eventos

Um *evento* é uma ocorrência física em um ponto específico no espaço e no tempo.

Ex: na situação acima, o acendimento da luz VERDE.

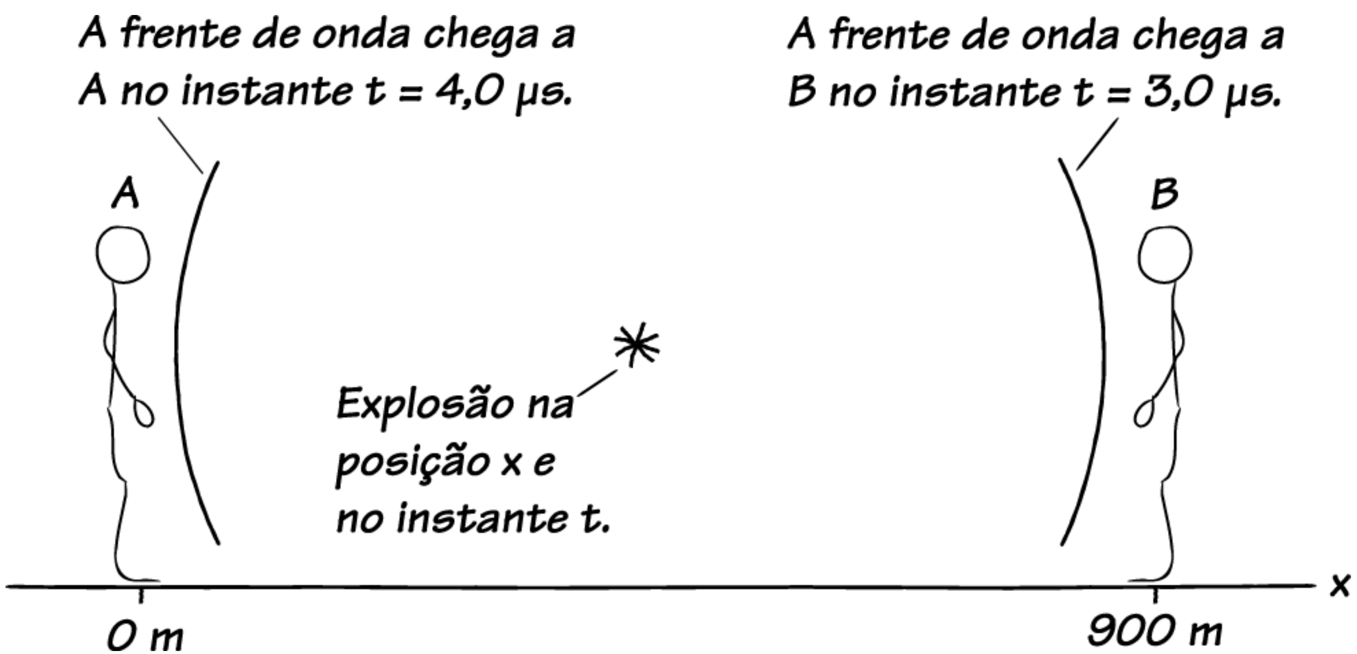
Se um evento ocorre para um observador, ele também ocorre para qualquer outro observador.

Fatos não são relativos!

A *descrição* de um evento poderá ser diferente de acordo com observadores distintos. Em particular, observadores em movimento relativo irão atribuir valores diferentes para a posição e instante de um mesmo evento.

Eventos

Importante: a posição e instante em que um evento *realmente ocorre*, de acordo com um determinado observador *não são* em geral iguais à posição e instante aonde este observador está quando *percebe* o evento.

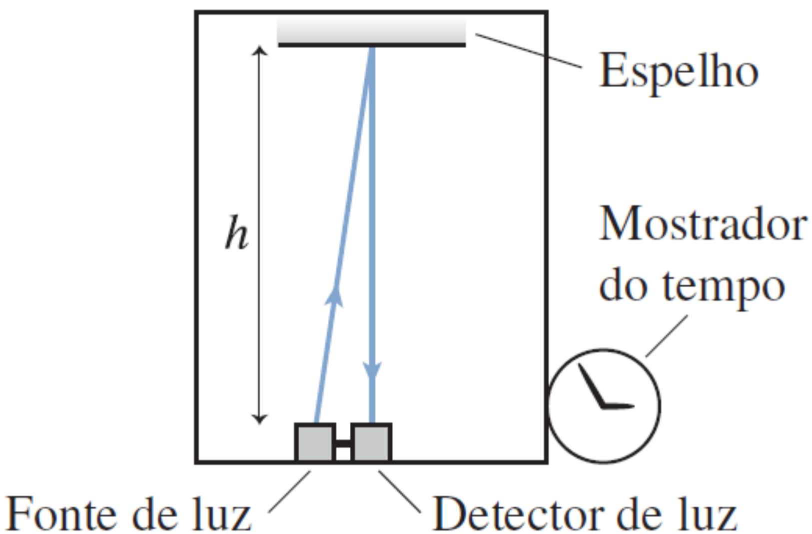


A e B *percebem* a explosão em tempos distintos, mas concordam quanto ao instante e posição em que ela *de fato ocorreu* no referencial comum de ambos (quais foram eles?) .

Dilatação Temporal

O exemplo de Ryan e Peggy indica que o tempo "passa" diferente para quem está no referencial S e S'. Vamos agora calcular quanto vale essa diferença

Relógio de luz



- **Considere 2 eventos:**
  i) um pulso de luz é emitido e
  ii) o pulso retorna e é detectado.

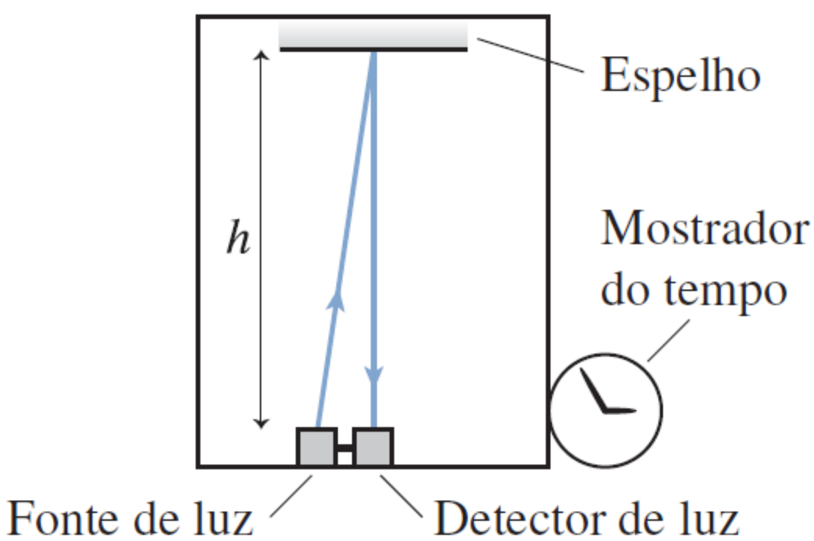
- **No referencial S' onde o relógio está em repouso, o tempo entre os dois eventos é**

$$\Delta t' = \frac{2h}{c}$$

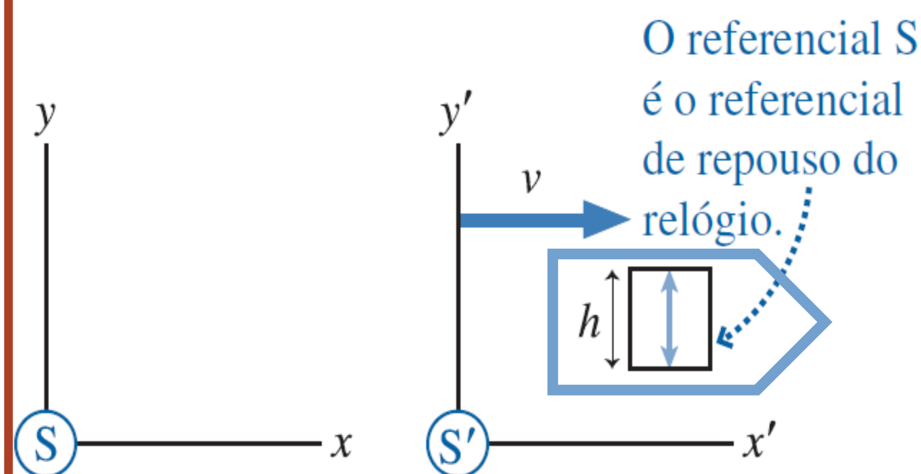
Dilatação Temporal

O exemplo de Ryan e Peggy indica que o tempo "passa" diferente para quem está no referencial S e S'. Vamos agora calcular quanto vale essa diferença

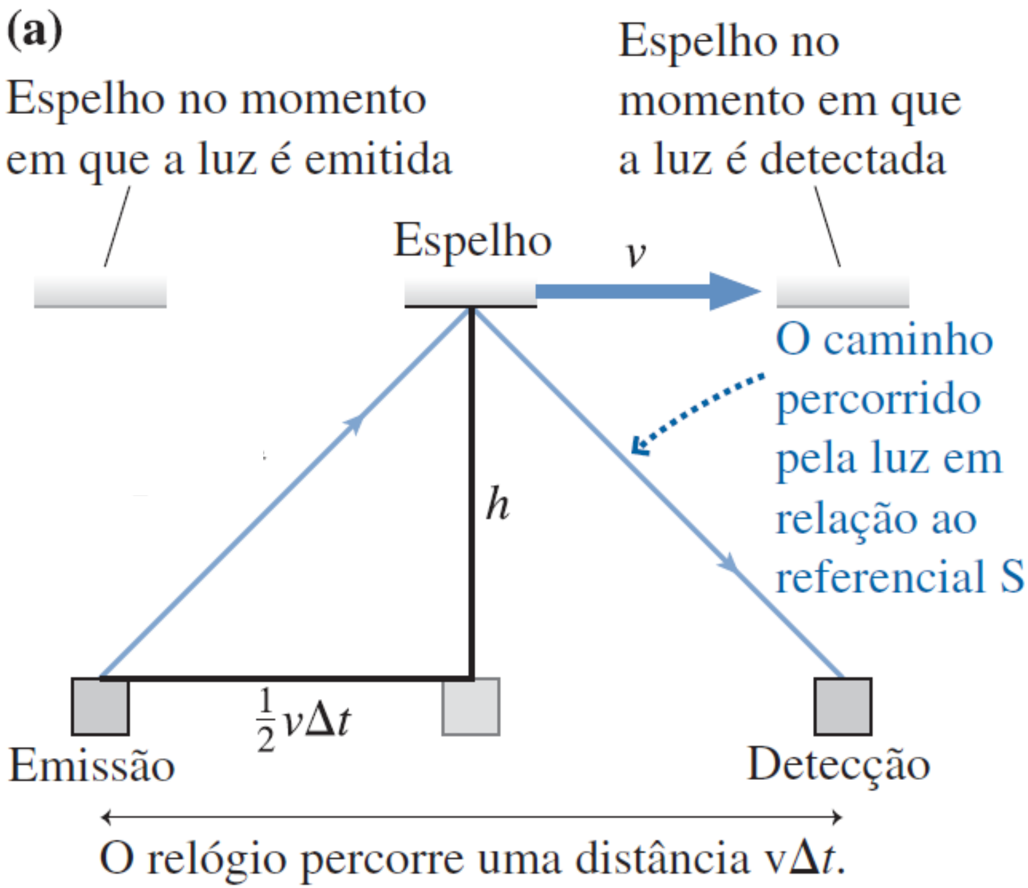
Relógio de luz



P: quanto tempo passa entre os mesmos eventos em um referencial *S* onde o relógio se move?

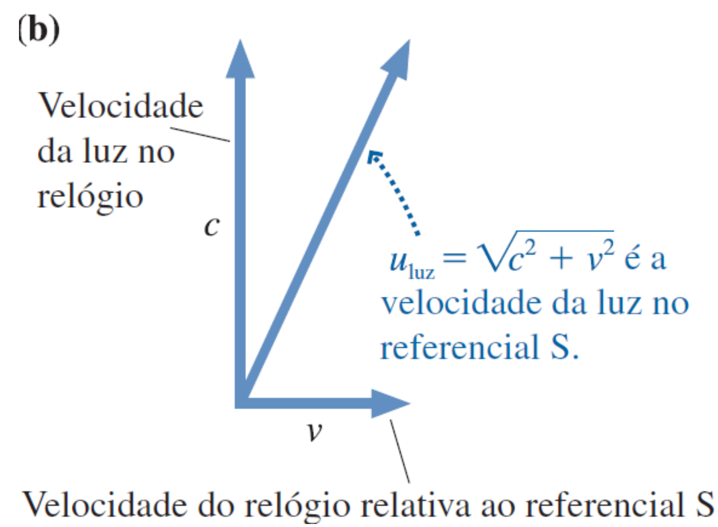


Dilatação temporal



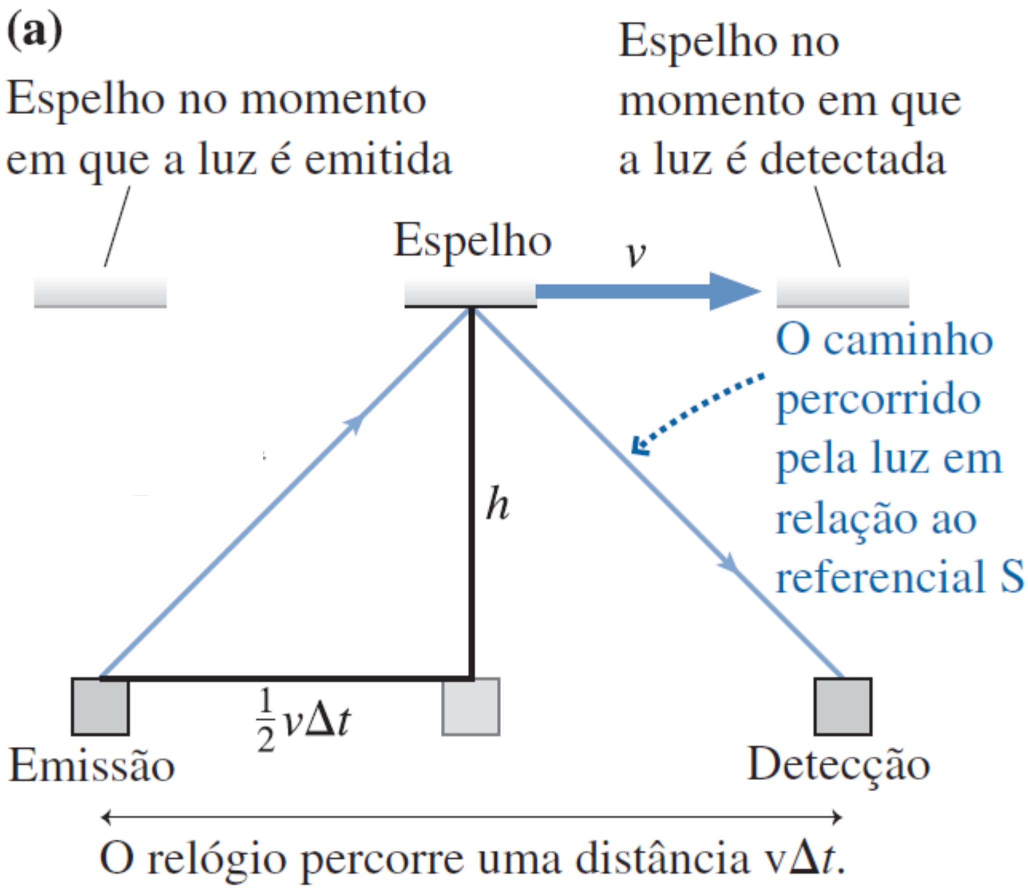
Análise Clássica (incorreta)

$$u_{luz} = \left\| \vec{u}_{luz}^{\,'} + \vec{v} \right\|$$



$$\Delta t = \frac{2h}{c} = \Delta t' ??$$

Dilatação temporal



Análise Relativística (correta)

u_{luz} = c !!!

$$\Delta t = \frac{2h/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma \Delta t'$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \geq 1$$

$\beta \equiv v/c < 1$

Dilatação temporal

Conclusão: o tempo Δt entre dois eventos, conforme medido no referencial *S* em que o relógio se move, é *maior* do que o registrado no referencial *S'* onde o relógio está em repouso. Chamamos esse efeito de

DILATAÇÃO TEMPORAL

Def: **tempo próprio $\Delta\tau$** = tempo medido por um relógio no seu próprio referencial de repouso. No exemplo acima **$\Delta\tau = \Delta t'$.** O tempo próprio **é o menor valor de tempo que pode ser medido entre dois eventos em qualquer referencial inercial.**

"Relógios em movimento andam mais devagar"

Dilatação temporal

Exemplo 37.5

Saturno dista 1,43 x 10^{12} m do Sol. Um foguete viaja em linha reta do Sol a Saturno com uma velocidade constante de 0,9c relativa ao sistema solar.

Quanto tempo levará para o foguete realizar o percurso em relação a um observador que está na Terra? E em relação a um astronauta que está no foguete?

P1: quais são os 2 eventos nesta pergunta?

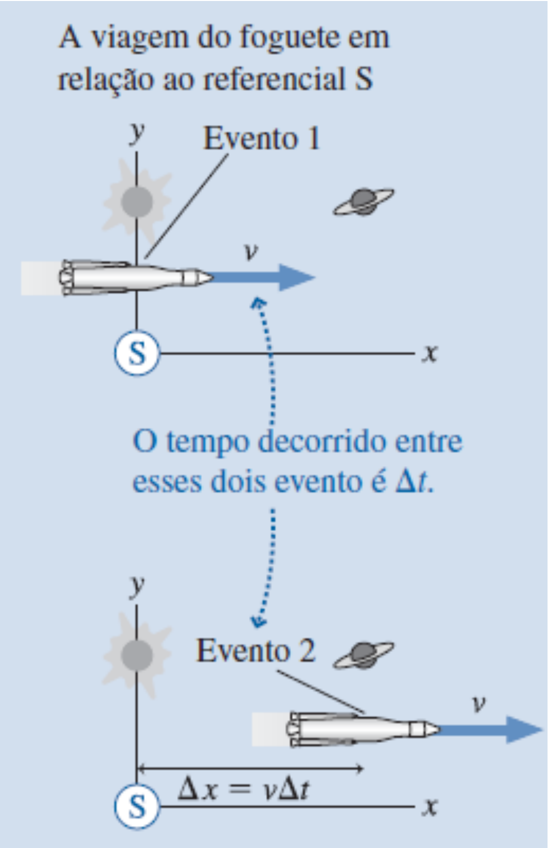
P2: qual desses tempos é o tempo próprio?

Dilatação temporal

Exemplo 37.5

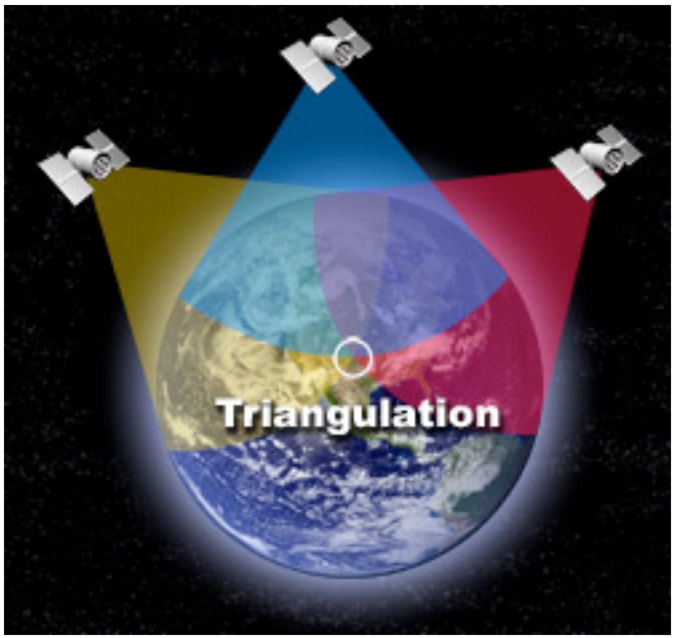
Saturno dista 1,43 x 10^{12} m do Sol. Um foguete viaja em linha reta do Sol a Saturno com uma velocidade constante de 0,9c relativa ao sistema solar.

Quanto tempo levará para o foguete realizar o percurso em relação a um observador que está na Terra? E em relação a um astronauta que está no foguete?



R: $\Delta t = 5300$ s e $\Delta\tau = 2310$ s Obs: Ambos estão corretos!!!

Dilatação temporal e GPS

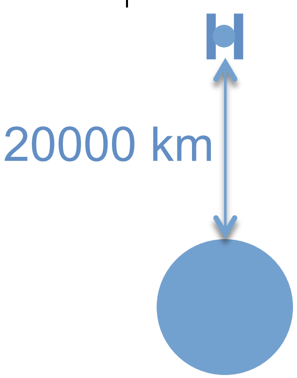


O Sistema GPS recebe sinais de satélites orbitando a cerca de 20.000km de altitude. Simplificando um pouco: o sinal tem uma assinatura temporal, a qual permite saber quanto tempo passou desde que foi enviado, portanto a distância do satélite naquele momento.

Como a órbita dos satélites é conhecida, se pelo menos 3 forem detectados pode-se então obter a posição do receptor por triangulação.

Problema: sem levar em conta os efeitos de dilatação temporal previstos pela relatividade, esses tempos e posições estarão *errados!*

Dilatação temporal e GPS



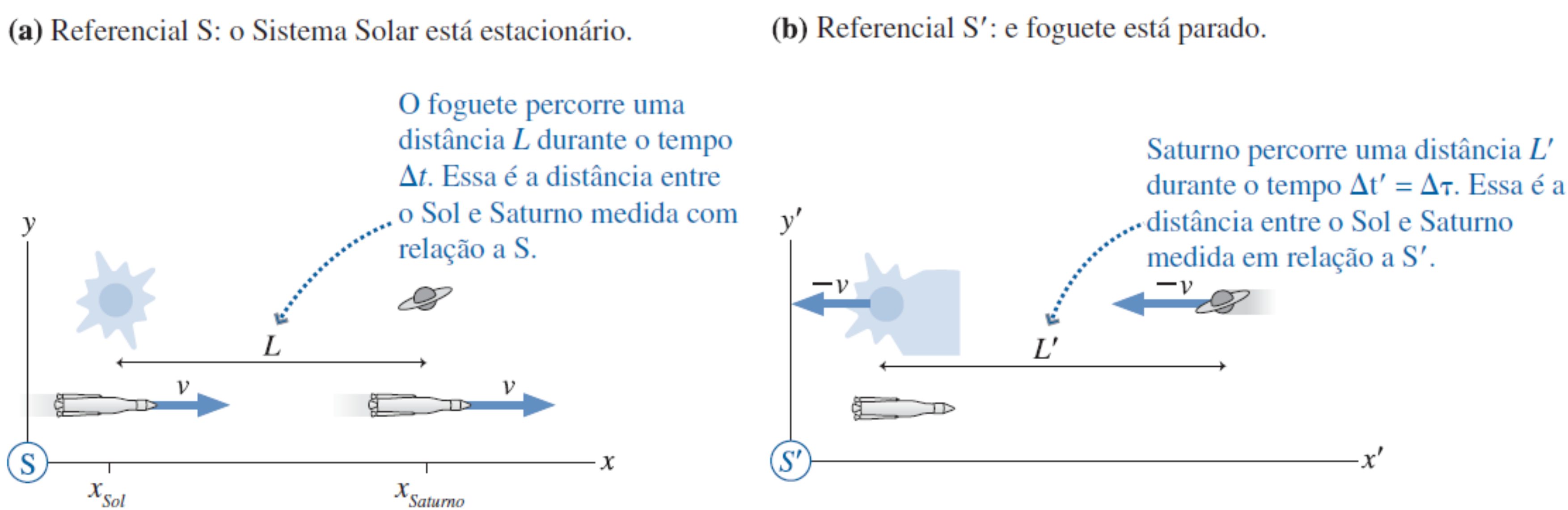
Desafio: calcule qual o erro na estimativa de distância com respeito a um satélite GPS que se acumula durante apenas 1h (medido no relógio do satélite) devido ao efeito de dilatação temporal da relatividade especial.

R: cerca de 100m!

Obs: na verdade o cálculo real é mais complicado, pois o referencial do satélite *não é inercial*, já que ele percorre uma curva! Nesse caso, também é preciso levar em conta efeitos previstos pela *Teoria da Relatividade Geral* . Sem isso o sistema GPS não funcionaria!!

Contração Espacial

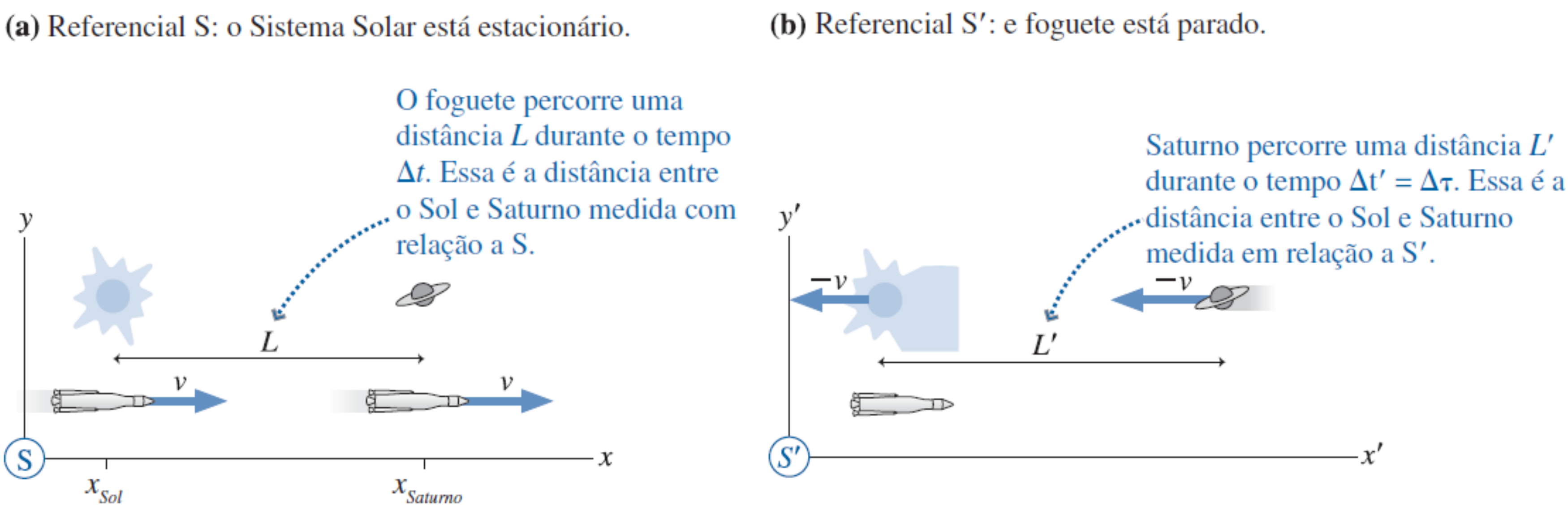
Exemplo 37.6.



Na figura acima o foguete viaja em linha reta do sol até Saturno com velocidade 0.9c relativamente ao sistema solar. A distância Saturno-Sol é de 1,43 x 10^{12} m. Qual é a distância entre o Sol e Saturno medida em relação ao referencial do foguete?

Contração Espacial

Exemplo 37.6.



A *distância* entre dois eventos também depende do referencial !

$$\boxed{L' = \sqrt{1-(\beta)^2}L = L/\gamma \leq L}$$

R: se β =0.9 e L = 1,43x 10^{12} m: L' = 0,62 x 10^{12} m.

Contração Espacial

Conclusão: a distância espacial *L* entre dois eventos, conforme medido em um referencial *S* em que a “régua” utilizada se move, é *menor* do que a distância *L’* registrada no referencial *S’* onde a régua está em repouso. Chamamos esse efeito de

CONTRAÇÃO ESPACIAL

Def: **distância própria *l*** = distância medida por uma régua no seu próprio referencial de repouso. No exemplo acima ***l* = L’.** A distância própria **é o maior valor de distância que pode ser medido entre dois eventos, em qualquer referencial inercial.**

“Objetos em movimento ficam menores”

Aproximação útil quando v << c

Série de Taylor: para x ~ 0,

$$f(x) = (1+x)^s = 1 + x.\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} + (\ldots) \simeq 1 + sx$$

$$se\ v \ll c: \begin{cases} \sqrt{1-(\beta)^2} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2} \approx 1 - \frac{1v^2}{2c^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \approx 1 + \frac{1v^2}{2c^2} \end{cases}$$

37.9 – Um ônibus escolar de 8,0 m de comprimento passa a 30 m/s. Qual é o valor de sua contração espacial?

Solução: 8,0 m no ref. do ônibus (comprimento/distância próprio) S' .

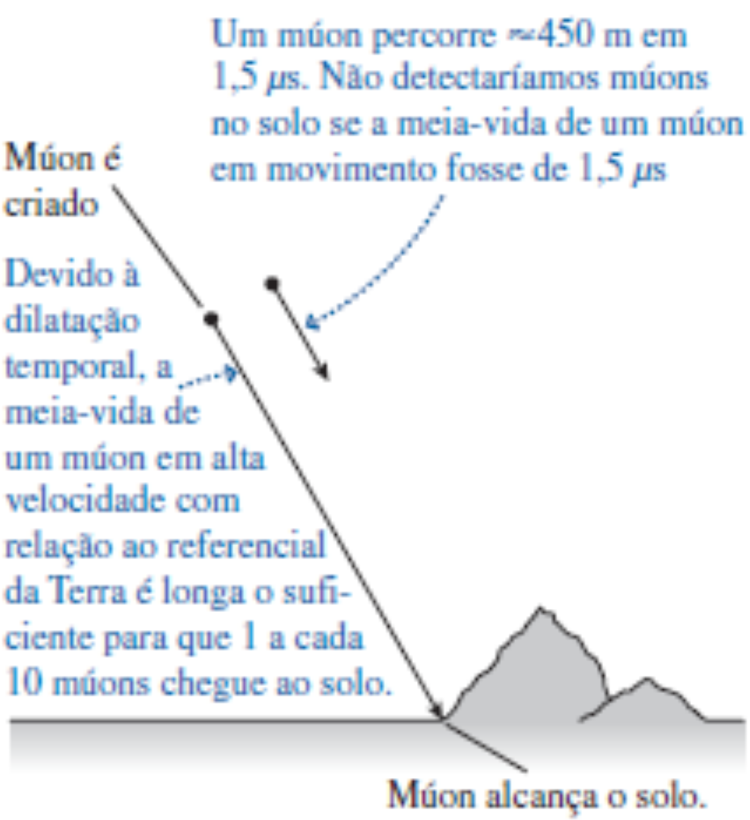
$$L = \sqrt{1-(\beta)^2}L' = \sqrt{1-(\beta)^2}l$$

$$L = \sqrt{1-(\beta)^2}l \approx \left(1 - \frac{1v^2}{2c^2}\right)l$$

Resposta: $l - L = 4 \times 10^{-14}$ m

Evidência experimental direta

Múons são partículas subatômicas instáveis, que são criados constantemente na alta atmosfera (60km). Cerca de 10% deles são observados chegando ao solo, com velocidade v = 0,99969 c



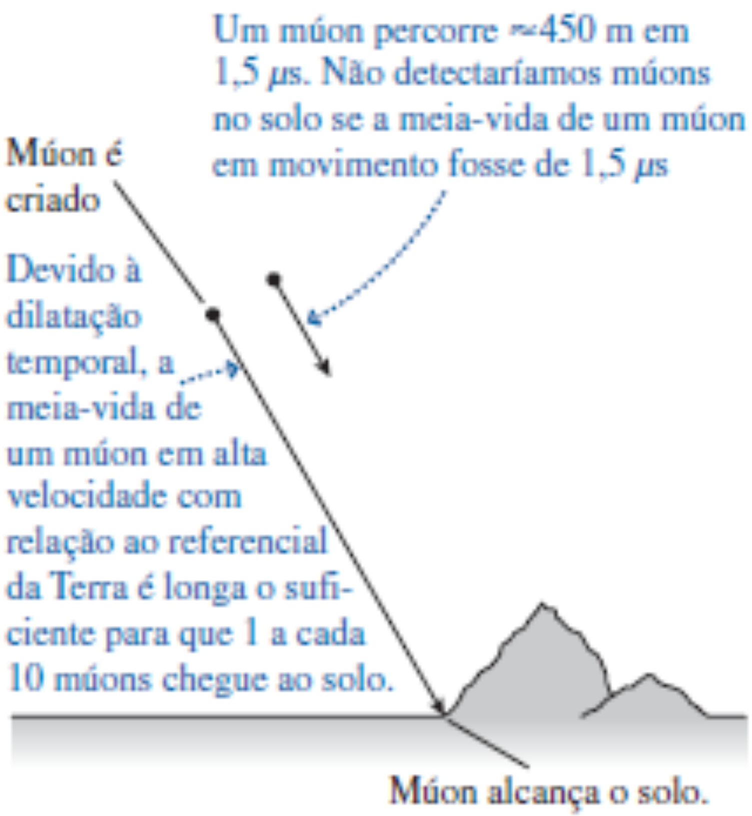
Problema: sabemos que o tempo de meia-vida de um múon é de apenas 1,5μs, correspondendo a percorrer apenas 450m. Após isso ele já tem 50% de chance de ter se desintegrado!!

A fração dos múons capazes de percorrer 60km = 133 x 450m seria apenas

$$(0{,}5)^{133} \sim 10^{-40} \text{ !!!!!}$$

Evidência experimental direta

Múons são partículas subatômicas instáveis, que são criados constantemente na alta atmosfera (60km). Cerca de 10% deles são observados chegando ao solo, com velocidade v = 0,99969 c



Solução: no referencial do solo, o tempo para a queda dos múons é

$$\Delta t = \boldsymbol{L / c = 200\mu s}$$

Devido à dilatação temporal, isto corresponde a **apenas τ = 5μs no referencial dos múons** (pois γ ~ 40)**.** Assim, a fração dos múons que chega deve de fato ser

$$\mathbf{(0{,}5)^{(5\,/\,1{,}5)} \sim 0.1} \quad \textbf{!!!!!}$$

Visto de outra forma, **no referencial dos múons** a distância até o chão é contraída para apenas

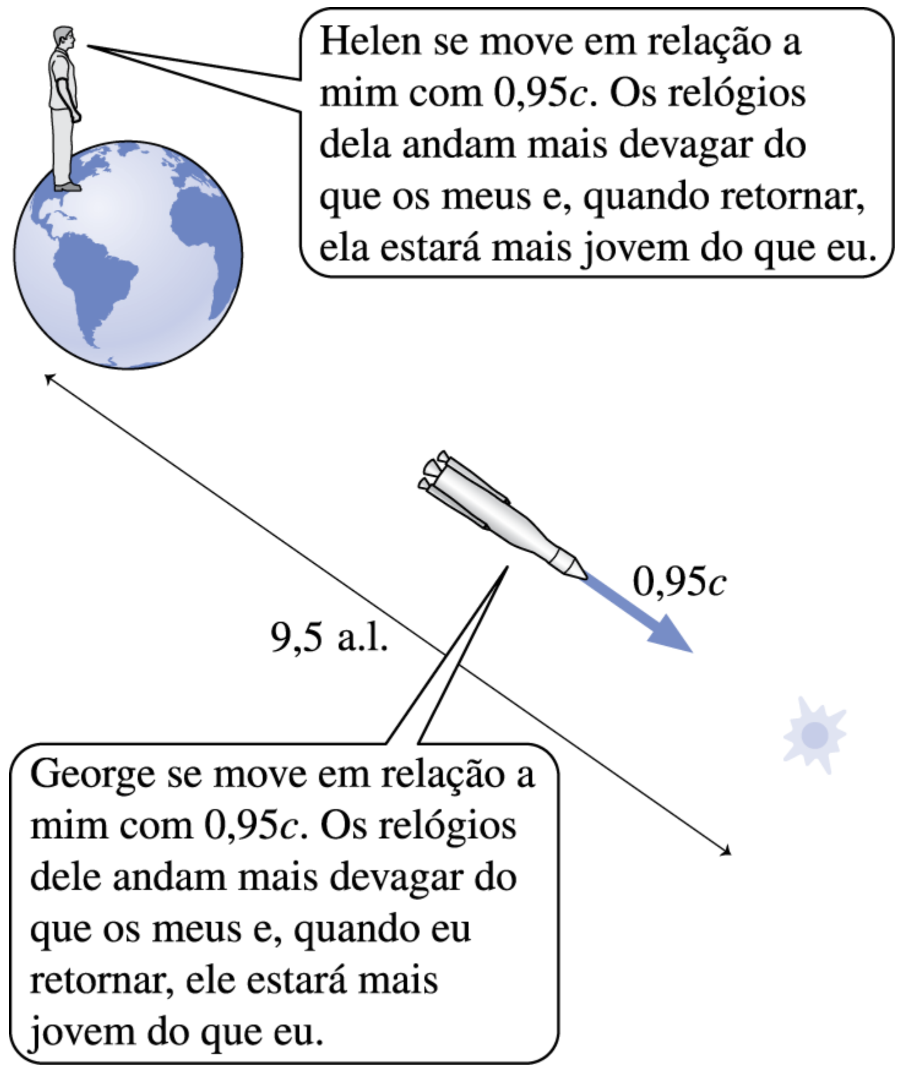
$$\boldsymbol{L' = L / \gamma = 1{,}5\ \text{km}}$$

“Paradoxo” dos Gêmeos

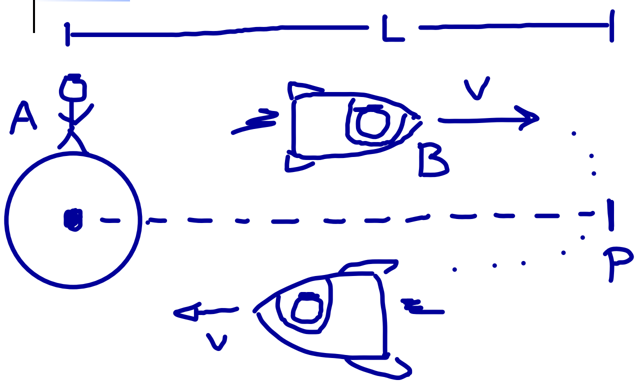
Espere aí... Parece haver uma contradição?!

George e Helen são gêmeos: Helen parte em uma viagem até uma estrela distante. Quando ela volta à Terra, quem estará mais jovem, George ou Helen? Ou terão a mesma idade?

Na verdade não há na um paradoxo… o referencial de Helen não é sempre inercial!



"Paradoxo" dos Gêmeos - a solução
(obs: não está no livro!)



(visão do ref. de A)

Ref. de A:

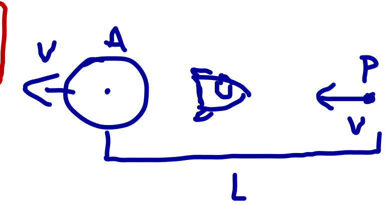
distância entre A e P : L

tempo até reencontro : $\boxed{t_A = \frac{2L}{v}}$

Ref. da ida de B

distância entre A e P : $L' = \underbrace{\sqrt{1 - v^2/c^2}}_{= \gamma^{-1} < 1} L < L$!

tempo de ida : $\boxed{t_{B_1} = \frac{\gamma^{-1} L}{v}}$

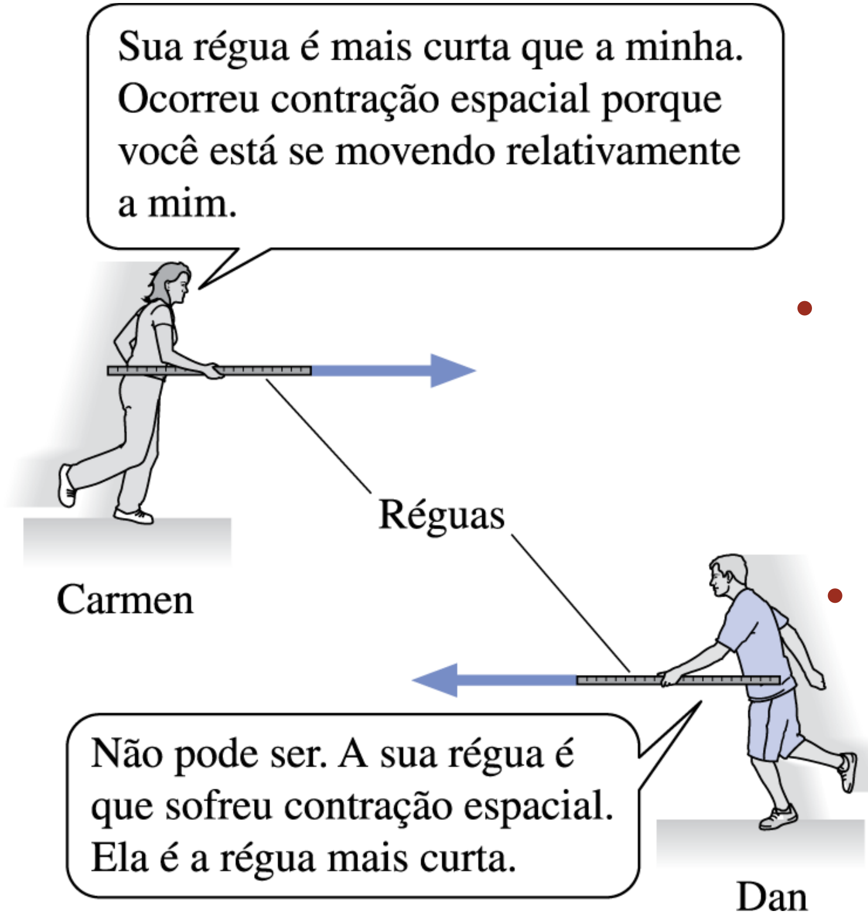


Ref. da volta de B : novamente $L' = \gamma^{-1} L \rightarrow t_{B_2} = \frac{\gamma^{-1} L}{v}$

$\rightarrow \boxed{t_B = \frac{2L}{\gamma v} < t_A !}$

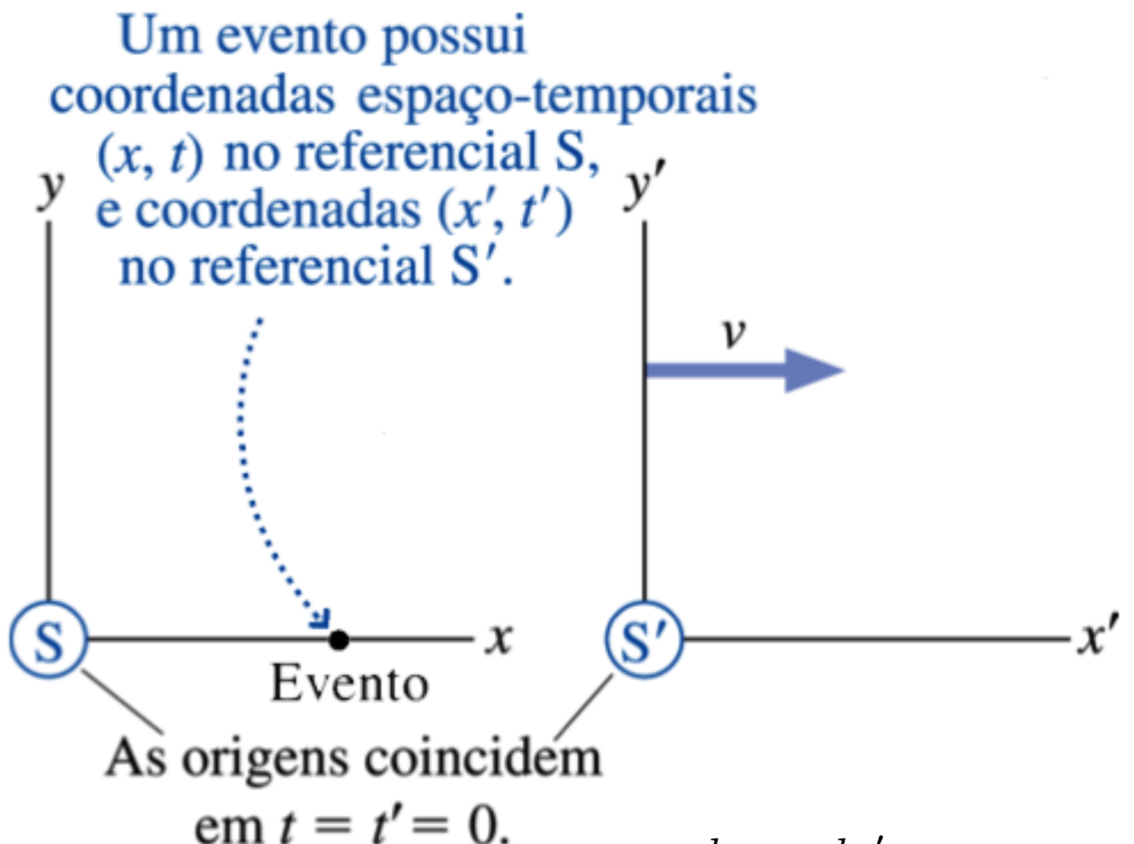
$\rightarrow$ B está mais novo que A!

Outro "Paradoxo"



- **Para medir o comprimento de um corpo em movimento, é preciso medir *simultaneamente* a posição de cada extremidade**
- **Porém, eventos simultâneos para Dan *não são simultâneos* para Carmen, e vice-versa!**
- **Para Carmen, Ben mede *primeiro* a posição da ponta da frente da régua dela, e *depois* a de trás. Ben diz que Carmen faz o mesmo com a régua dele…**

Transformações de Galileu

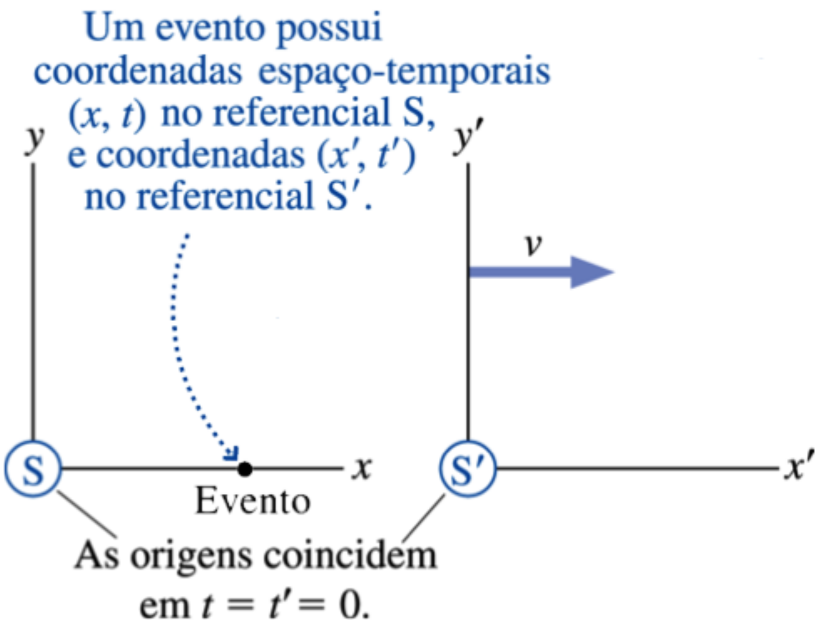


$$x = x' + vt$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v = u'_x + v$$
$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u'_y$$
$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt} = u'_z$$

Transformações de Lorentz

As transformações corretas têm de satisfazer quatro condições:



1) Concordar com as transformações de Galileu no limite de baixas velocidades; v << c

2) Transformar não apenas as coordenadas espaciais, mas também a coordenada temporal.

3) Assegurar que a velocidade da luz seja sempre a mesma, *c* , em todos os referenciais.

4) Serem *lineares*:

$$x' = a\,x + b\,t \quad \text{e} \quad t' = A\,x + B\,t\,,$$

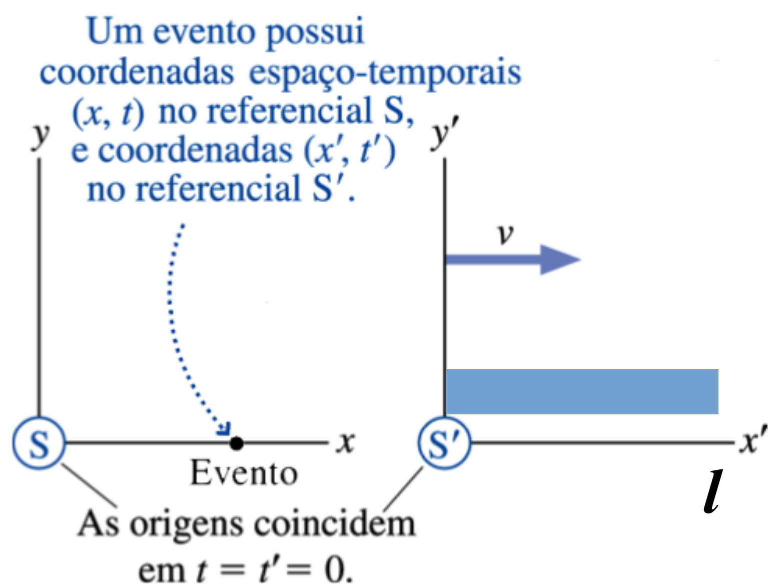
onde a, b, A *e* B *são constantes que dependem apenas de* ***v***

Transformações de Lorentz

- **Evento 1:** um relógio localizado na origem de *S'* (x'_1= 0) marca t'_1
  - No ref. *S*, este evento tem coordenadas (x_1 = vt_1, t_1) para algum t_1. Substituindo na transformação:

$$0 = x_1' = av\, t_1 + bt_1 \longrightarrow b = -av \longrightarrow \mathbf{x' = a\,(x - v\,t)}$$

Considere agora uma régua de comprimento próprio l, que está parada no referencial S', indo de x' =0 até x'= l



Transformações de Lorentz

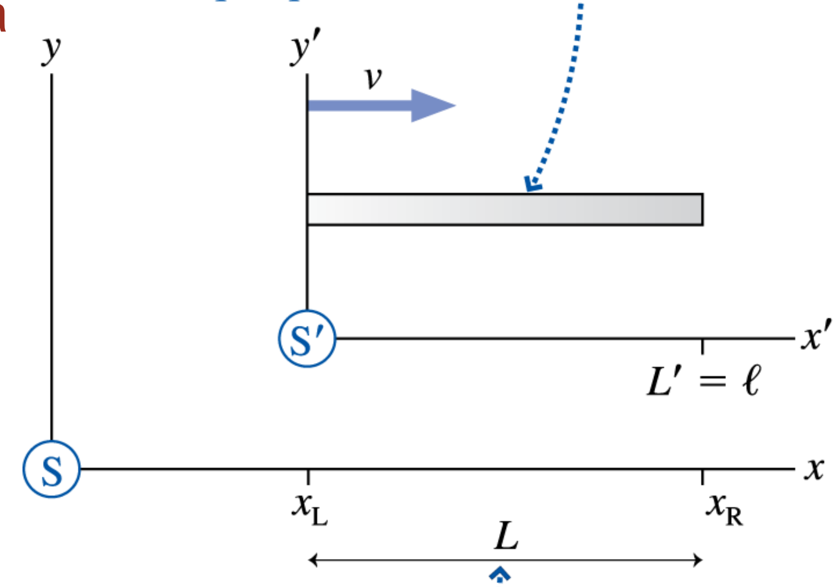
- **Evento 2:** a ponta da régua passa por um relógio parado no referencial *S* na hora em que este também mede t_1 . Substituindo na transformação:

$$l = x'_2 = a\,(x_2 - v\,t_1)$$

- Mas sabemos que, pela contração espacial, as distâncias entre os dois eventos nos dois referenciais satisfazem:

$$x_2' - x_1' = \gamma\,(x_2 - x_1)$$

O objeto encontra-se em repouso no referencial S′. Seu comprimento é L′ = ℓ, que pode ser medido a qualquer instante.



Devido ao objeto estar em movimento no referencial S, a fim de que possamos encontrar seu comprimento *L* no referencial S devemos efetuar medições simultâneas de suas extremidades.

Conclusão: a = γ →

$$x' = \gamma\,(x - v\,t)$$

Transformações de Lorentz

$$x' = \gamma\,(\,x - v\,t\,)$$

- Usando os mesmos argumentos mas com uma régua parada no referencial *S,* podemos concluir também que

$$x = \gamma\,(\,x' + v\,t'\,)$$

- Resolvendo para *t'* em função de x, t :

$$t' = \gamma\,(\,t\ - v\,x\,/\,c^2\,)$$

Transformações de Lorentz

As transformações corretas têm de satisfazer quatro condições:

1) Concordar com as transformações de Galileu no limite de baixas velocidades; v << c ✔

2) Transformar não apenas as coordenadas espaciais, mas também a coordenada temporal. ✔

3) Assegurar que a velocidade da luz seja sempre a mesma, *c* , em todos os referenciais. ✔

4) Serem *lineares*: ✔

$$x' = a\,x + b\,t \quad \text{e} \quad t' = A\,x + B\,t\,,$$

*onde **a**, **b**, **A** e **B** são constantes que dependem apenas de **v***

$$\mathbf{x' = \gamma\,(\,x - v\,t\,)}$$

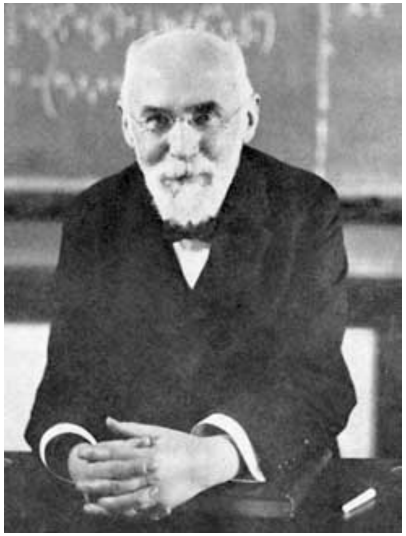
$$\mathbf{t' = \gamma\,(\,t - v\,x / c^2\,)}$$

Transformações de Lorentz

O que ocorre com as distâncias y e z, perpendiculares ao movimento? Contraem? Esticam? **R: nada**

De S para S'	de S' para S
$x' = \gamma\,(x - vt)$	$x = \gamma\,(x' + v\,t')$
$y' = y$	$y = y'$
$z' = z$	$z = z'$
$t' = \gamma\,(t - vx\,/\,c^2)$	$t = \gamma\,(t' + vx'/\,c^2)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



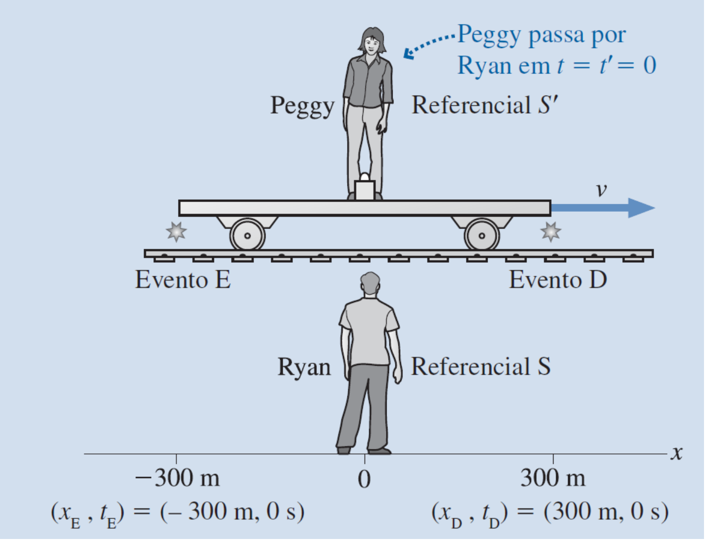
Hendrik Lorentz

Transformações de Lorentz

Ex. 37.8: Peggy está parada no centro de um vagão longo e plano com uma bomba fixa em cada extremidade do mesmo. O vagão passa por Ryan, que está parado no solo, com uma velocidade v = 0,8c. Ele vê os flashes provenientes da explosão da bomba simultaneamente 1,0 μs após Peggy ter passado por ele. Mais tarde, Ryan vê marcas queimadas no trilho a 300 m de ambos os lados do local onde ele estava parado.

a) De acordo com Ryan, qual é a distância entre os locais das duas explosões? Quando elas ocorrem em relação ao instante em que Peggy passa por ele?

b) De acordo com Peggy, qual é a distância entre os locais das duas explosões?Quando elas ocorrem em relação ao instante em que Ryan passa por ela?



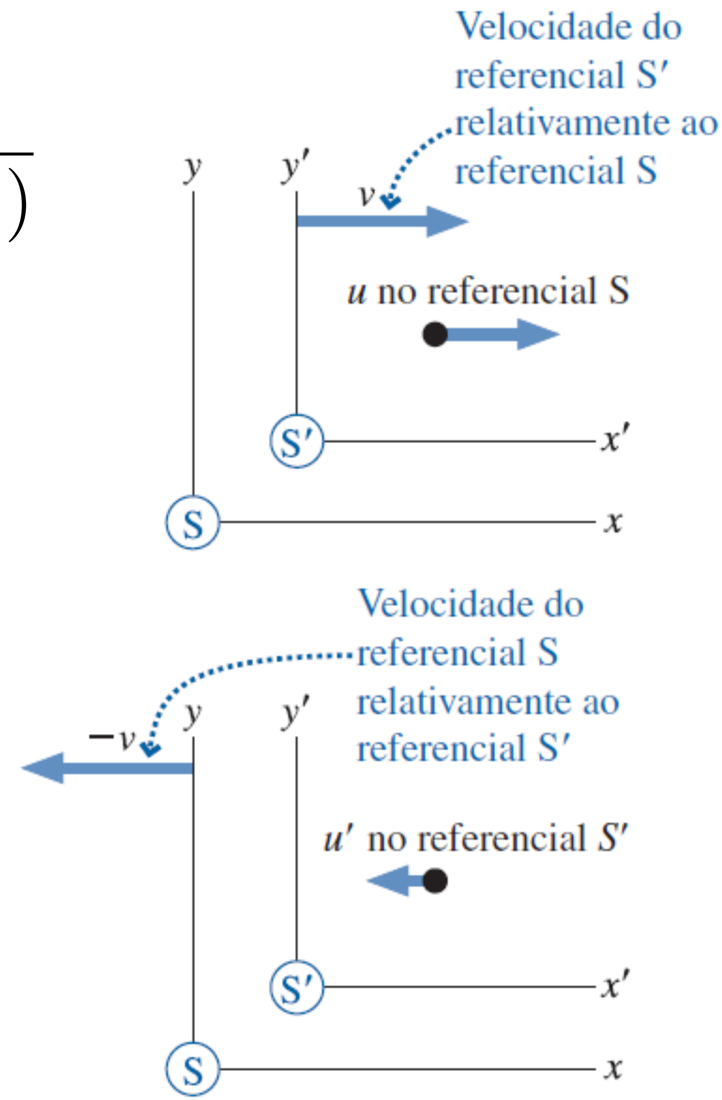
Transformação de Lorentz p/ velocidades

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d(\gamma(x' + vt'))}{d\left(\gamma\left(t' + vx'/c^2\right)\right)}$$

$$= \frac{dx' + vdt'}{dt' + vdx'/c^2}$$

$$= \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Reciprocamente: $u' = \dfrac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}}$

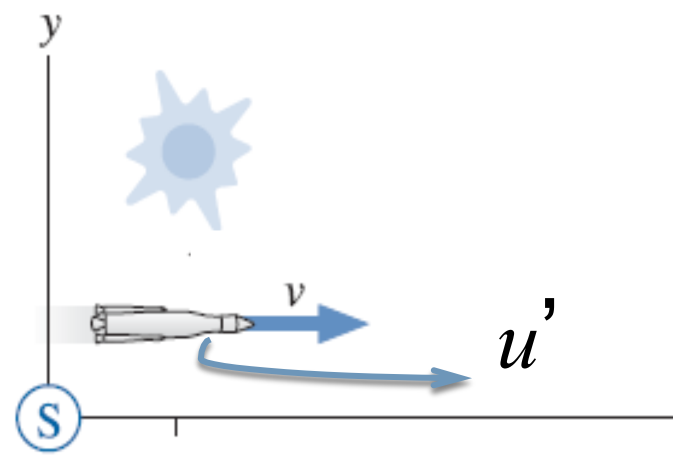


Transformação de Lorentz p/ velocidades

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Teste: se $u' = v = c$: $\boldsymbol{u = c}$ ✔

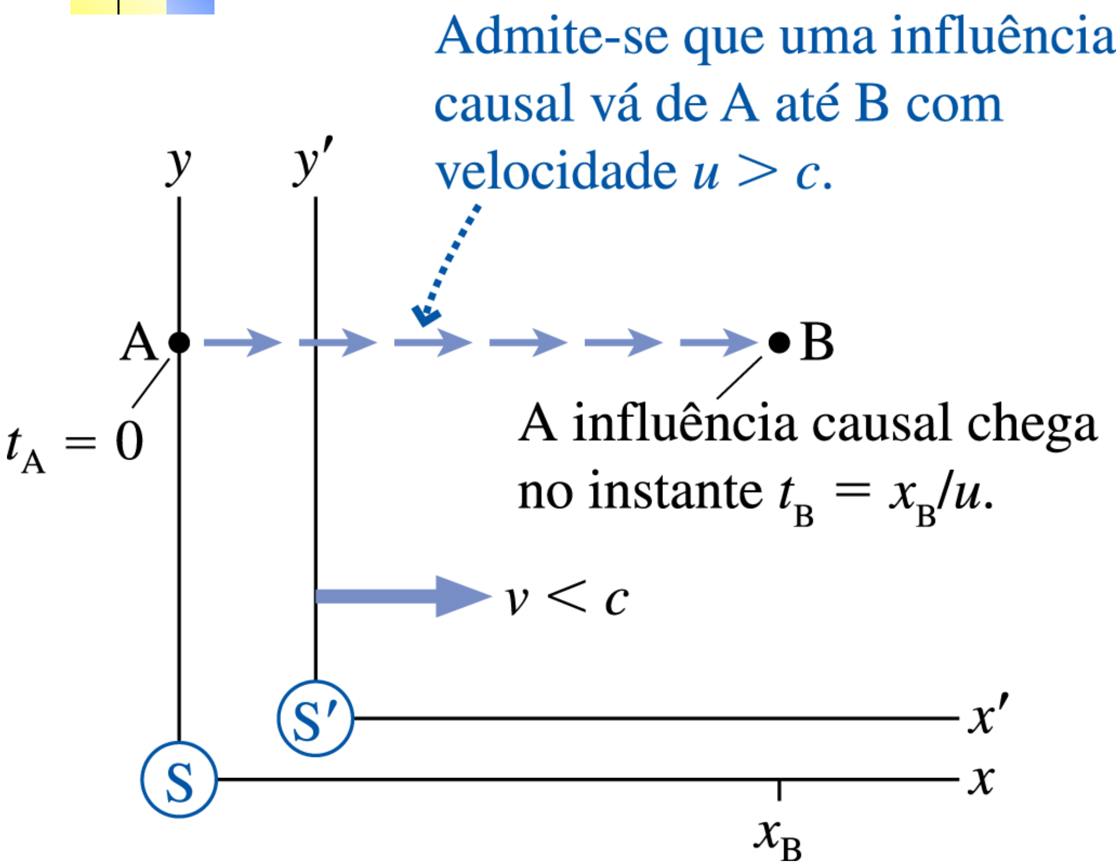
37.10 - Um foguete passa pela Terra com uma velocidade 0,9c. Ao passar pela Terra, ele lança um projétil para frente com velocidade 0,95c em relação ao foguete. Qual é a velocidade do projétil em relação a Terra?



Resposta: $u = 0{,}997c$

Desafio: prove que se $u' \leq c$ e $v \leq c$ então $u \leq c$

Pode algo andar mais rápido que a luz?



Visto do ref. *S'*:

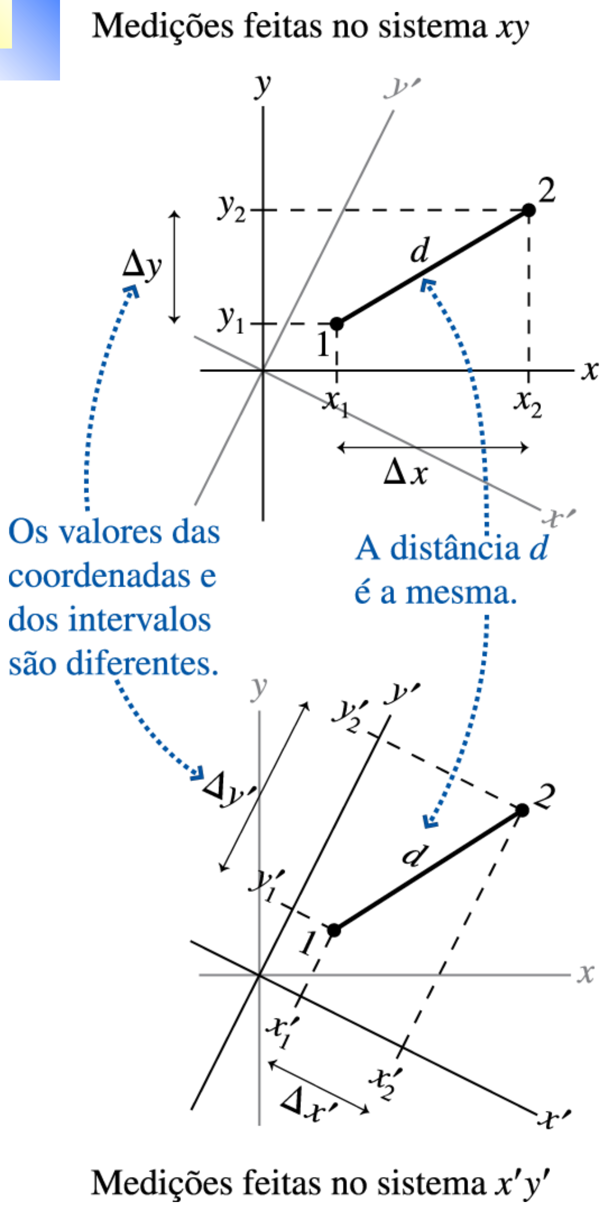
$$t'_A = \gamma\left(t_A - \frac{v}{c^2}x_A\right) = 0$$

$$t'_B = \gamma\left(t_B - \frac{v}{c^2}x_B\right)$$
$$= \gamma t_B\left(1 - \frac{vu}{c^2}\right)$$

Se v > (c / u).c : $t'_B < 0$!!

Se algo pudesse andar mais rápido que a luz, alguns observadores veriam **efeitos acontecerem antes das suas causas**, como num filme rodando ao contrário – absurdo!

O Intervalo entre 2 eventos



Na geometria usual, a **distância espacial** entre 2 pontos não depende da escolha da orientação dos eixos *x* e *y*

$$d^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$= (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$$

O Intervalo entre 2 eventos

Em relatividade: o ***intervalo espaço-temporal*** entre dois eventos:

$$\boldsymbol{s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}$$

é independente do referencial inercial usado para medir *x* e *t*

2 eventos

E1: (x_1, t_1) ou (x'_1, t'_1)

E2: (x_2, t_2) ou (x'_2, t'_2)

$\Delta x = (x_2 - x_1)$; $\Delta t = (t_2 - t_1)$

$$c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 =$$

$$= \gamma^2 \left[c^2(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)^2 - (\Delta x' + v\Delta t')^2\right]$$

$$= \cancel{\gamma^2} \left[c^2(\Delta t')^2 \cancel{(1 - v^2/c^2)} + (\Delta x')^2 \cancel{(v^2/c^2 - 1)} + \cancel{2v\Delta x'}\Delta t' - \cancel{2v\Delta x'}\Delta t'\right]$$

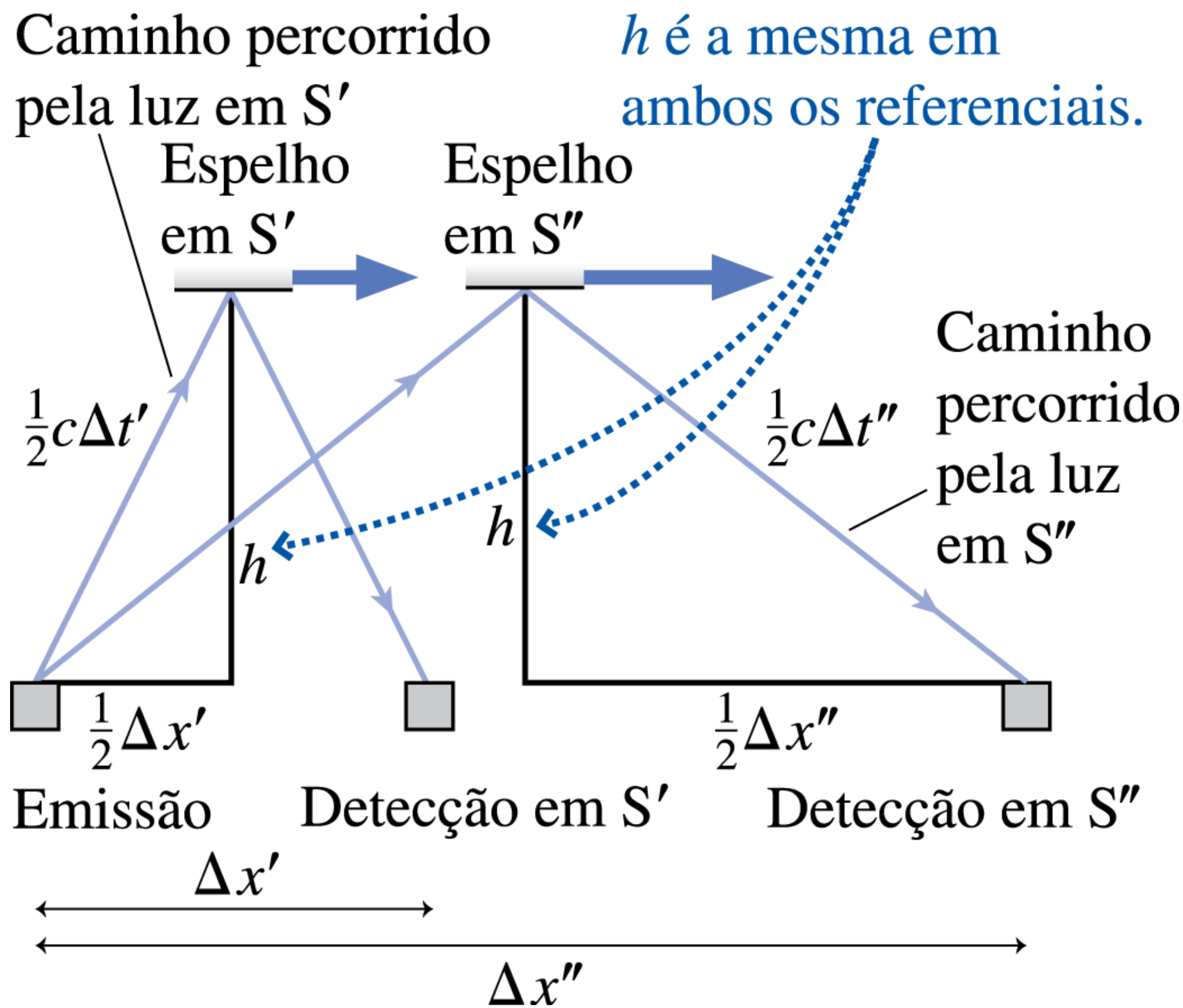
$$= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2$$

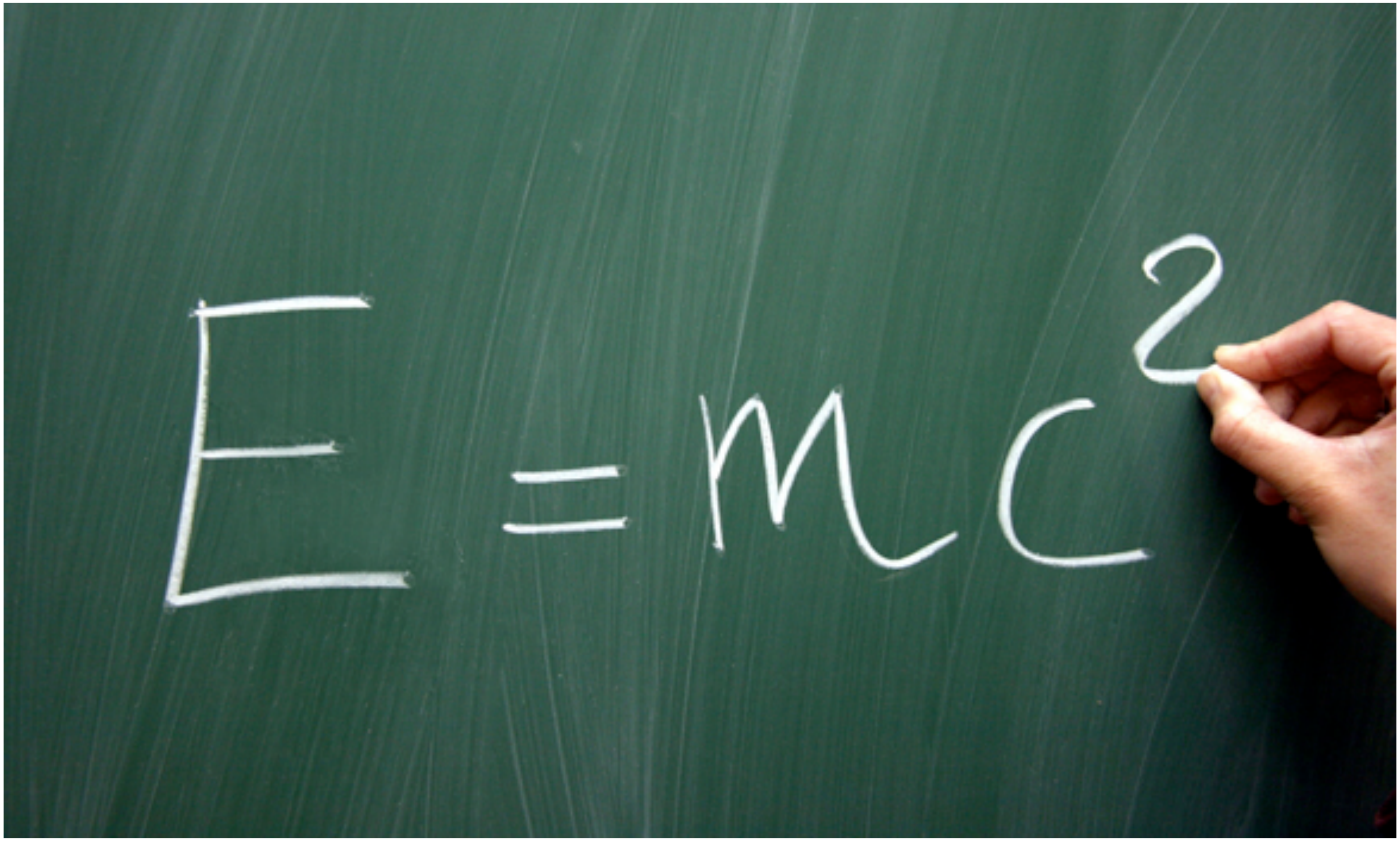
O intervalo *s* não é relativo!!

Interpretação Geométrica do Intervalo entre 2 eventos

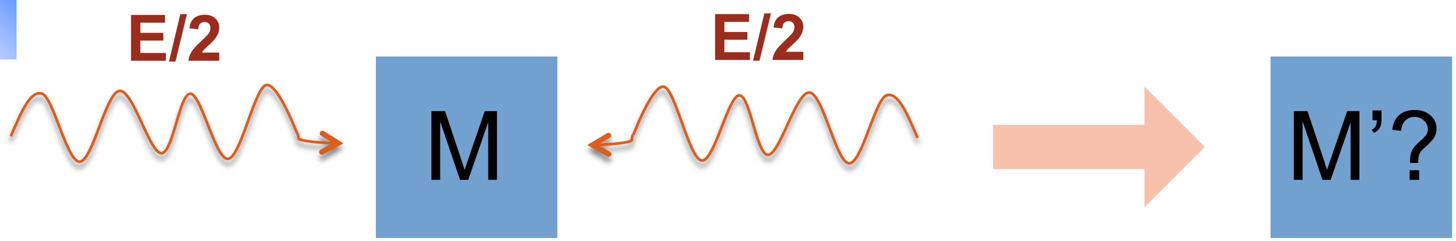
E1: Luz é emitida

E2: Luz é detectada




E = mc2

$E = mc^2$ - Motivação



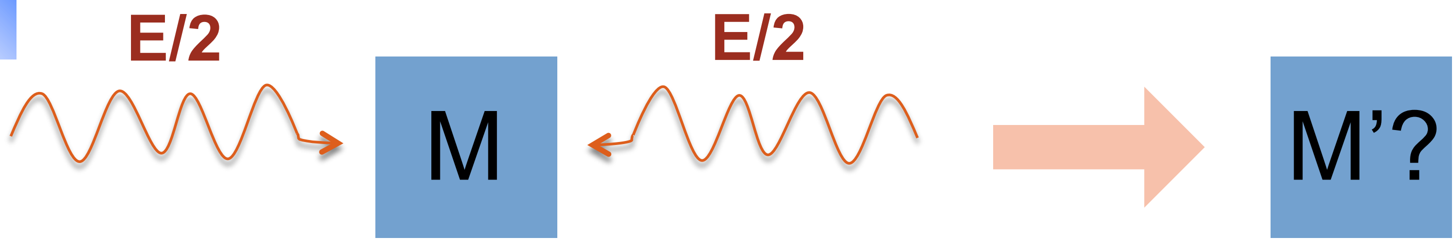
Em um referencial se movendo <u>para baixo</u> com velocidade *v* << *c*

sen α = v/c

Cons. momento na dir. *y*: M'v = Mv + 2 (mom. *y* da luz)!

$$\begin{aligned} dE = F dx &= \frac{dp}{dt} dx \\ &= \frac{dx}{dt} dp \\ &= u dp \end{aligned}$$

$E = mc^2$ - Motivação



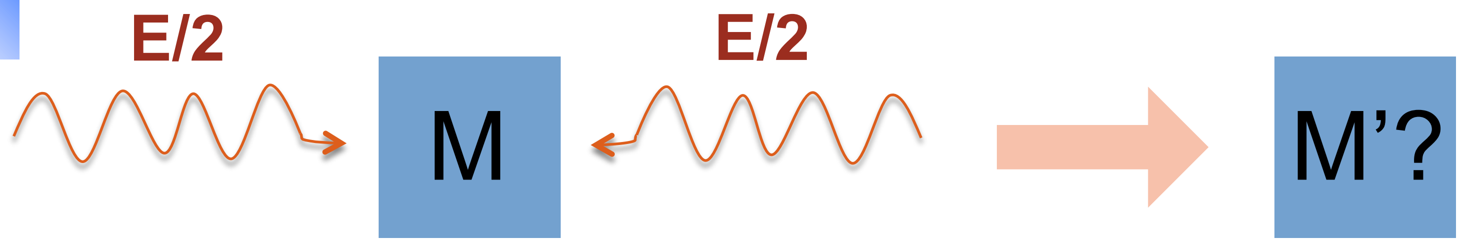
Em um referencial se movendo <u>para baixo</u> com velocidade *v* << *c*

sen α = v/c

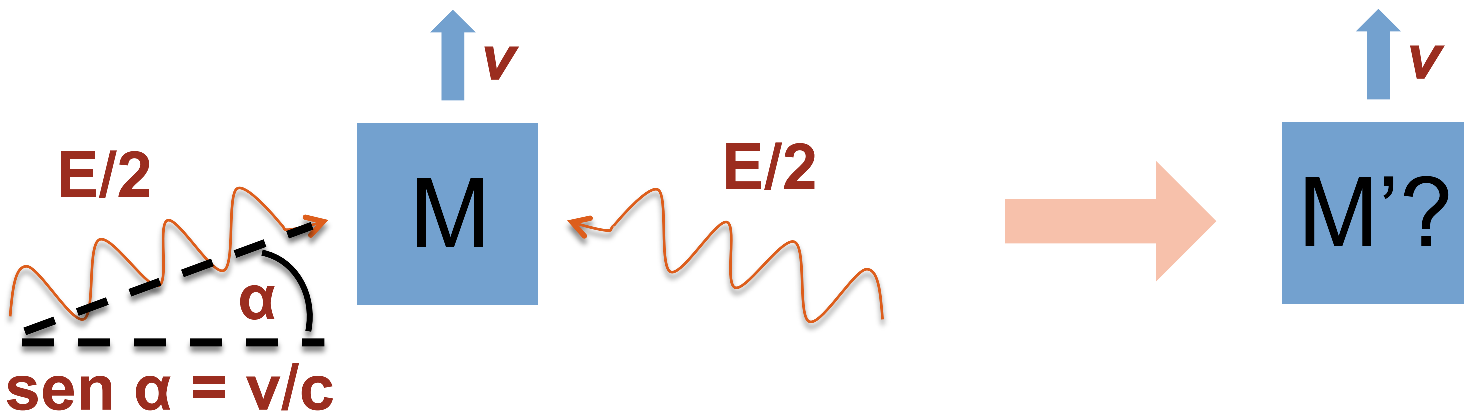
$$\begin{aligned} dE = F\,dx &= \frac{dp}{dt}dx \\ &= \frac{dx}{dt}dp \\ &= u\,dp \end{aligned}$$

Cons. momento na dir. *y*: M'v = Mv + 2 ((E/2c) sen α)

$E = mc^2$ - Motivação



Em um referencial se movendo <u>para baixo</u> com velocidade $v \ll c$



Cons. momento na dir. *y:* $M'v = Mv + E\,v / c^2$

$$\boxed{E = (M' - M)c^2\ !}$$

Explorando $E_0 = mc^2$

Fissão Nuclear do ^{235}U (^{238}U 99.2% e ^{235}U 0.7 %)

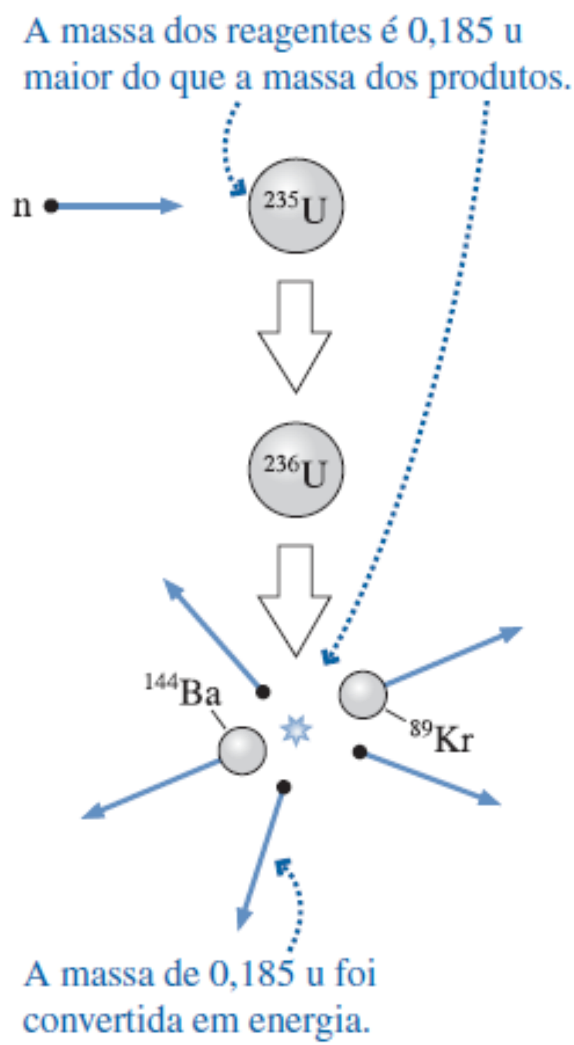
$n + {}^{235}U \rightarrow {}^{236}U \rightarrow {}^{144}Ba + {}^{89}Kr + 3n$

1 u = 1/12 (Massa do ^{12}C) = $1{,}66 \times 10^{-27}$ Kg.

A massa dos produtos somada é 0,185u menor do que a massa dos reagentes.

$M_{antes} - M_{depois} = 0{,}185\ u = 3.07 \times 10^{-28}$ Kg.

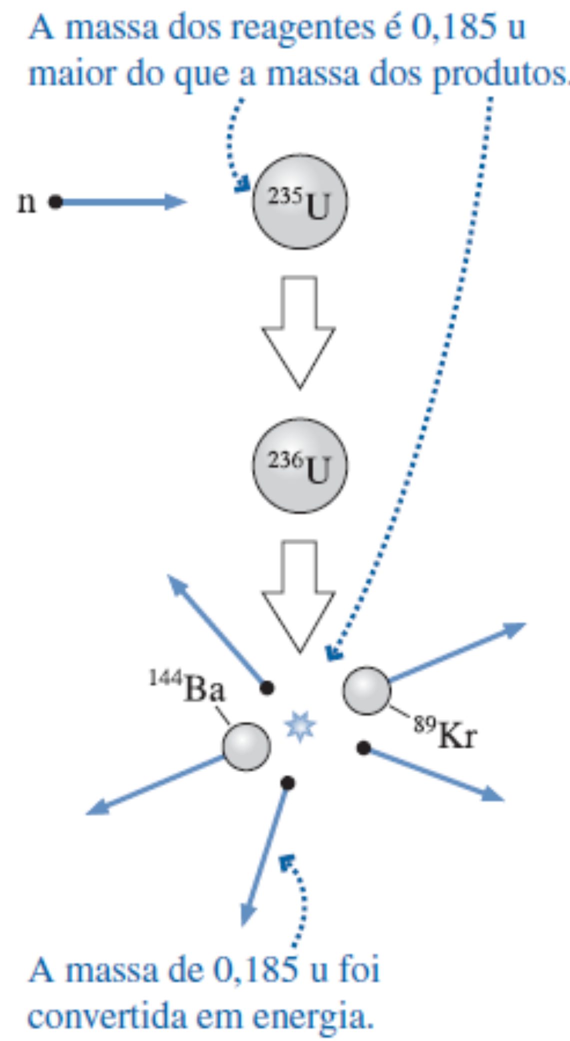
$E_0 = mc^2 = 2.8 \times 10^{-11}$ J para um átomo
$N = 6.02 \times 10^{23}$ átomos



Explorando $E_0 = mc^2$

Fissão Nuclear do ^{235}U (^{238}U 99.2% e ^{235}U 0.7 %)

Exercício: Uma usina nuclear gera energia térmica (calor) com uma potência de 3 GW. 1 GW dessa energia é convertida em energia elétrica (eficiência 33 %). Quantos átomos de U são fissionados no ano?



$E_0 = mc^2 = 2.8 \times 10^{-11}$ J para um átomo

$N = 6.02 \times 10^{23}$ átomos

Energia e Momento linear Newtonianos

Relembrando: Na mecânica de Newton existem

Leis de conservação:

Conservação do Momento Linear: num sistema isolado de forças externas,

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$$

onde o vetor $\mathbf{P} = \Sigma_j\, m_j\, \mathbf{u}_j$ é o **momento linear total** das partículas do sistema

Conservação da Energia: num sistema submetido a forças conservativas

$$E_i = E_f$$

onde $E = \underbrace{\boxed{\Sigma_j\, \frac{1}{2}\, m_j\, u_j^2}}_{\text{energia cinética}} + \underbrace{\boxed{V(x_1,\ldots,x_n,t)}}_{\text{energia potencial}}$ é a **energia total** das partículas do sistema

Energia e Momento linear Newtonianos

Essas leis são

invariantes por transformações de Galileu:

Se $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$ vale em um referencial inercial *S*, então em um referencial *S'* se movendo com velocidade ***v*** *:*

$$\mathbf{P}_i' = \mathbf{\Sigma}_j\, m_j\, \mathbf{u}_j^{i'} = \mathbf{\Sigma}_j\, m_j\, (\mathbf{u}_j^{i} - \mathbf{v}) = \mathbf{\Sigma}_j\, m_j\, \mathbf{u}_j^{i} - (\mathbf{\Sigma}_j\, m_j)\, \mathbf{v}$$

$$= \mathbf{P}_i - M\mathbf{v} = \mathbf{P}_f - M\mathbf{v} = \mathbf{P}_f'$$

Da mesma forma, se $E_i = E_f$ e $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_f$ valem em *S*, então em *S'*

$$E_i' = \mathbf{\Sigma}_j\, \tfrac{1}{2}\, m_j\, (u_j^{i'})^2 + V(x'_1 + vt, \ldots, x'_n + vt) = \mathbf{\Sigma}_j\, \tfrac{1}{2}\, m_j\, (\mathbf{u}_j^{i} - \mathbf{v})^2 + V(x_1, \ldots, x_n)$$

$$= \mathbf{\Sigma}_j\, \tfrac{1}{2}\, m_j\, (u_j^{i})^2 + (\mathbf{\Sigma}_j\, m_j\, \mathbf{u}_j^{i}).\mathbf{v} + \tfrac{1}{2} M v^2 + V(x_1, \ldots, x_n)$$

$$= E_i + \mathbf{P}_i \,.\, \mathbf{V} + \tfrac{1}{2} M v^2 = E_f + \mathbf{P}_f \,.\, \mathbf{V} + \tfrac{1}{2} M v^2 = E_f'$$

Energia e Momento linear Newtonianos

Porém o momento e energia Newtonianos

não são invariantes por transformações de Lorentz:

Ex: Se $\boldsymbol{\Sigma_j m_j u^i_j = \Sigma_j m_j u^f_j}$ vale em um referencial inercial *S*, então em um

referencial *S'* se movendo com velocidade ***relativística*** ***v*** *:*

$$\boldsymbol{\Sigma_j m_j u^i_j{}' = \sum_j m_j \left(\frac{u^i_j - v}{\sqrt{1 - u^i_j v / c^2}} \right) \neq \Sigma_j m_j u^f_j{}'}$$

??? P: Será que momento e energia não se conservam mais ???

R: SIM, mas não terão a mesma forma Newtoniana

Energia e Momento linear relativísticos

Adivinhando a forma relativística para o **Momento** de uma partícula

$$P_{Newtoniano} = mu = m\frac{dx}{dt}$$

Um 'chute' razoável é tentar medir o momento com respeito ao

tempo próprio τ da partícula

$$P_{Relativistico} = m\frac{dx}{d\tau} = m\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma_p P_{Newtoniano}$$

onde $\gamma_p = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

Obs 1: $\gamma_p \neq \gamma$ **!** (u é a velocidade **da partícula**, não do referencial *S'*)

Obs 2: quando $u \ll c$, $P_{Relativistico} \longrightarrow P_{Newtoniano}$

Exemplo: Momento linear relativístico

37.11 – Em um acelerador de partículas, elétrons atingem uma velocidade de 0,999c relativamente ao laboratório. A colisão de um elétron com um alvo produz um múon que se move para a frente com uma velocidade igual a 0,95c em relação ao laboratório. A massa do múon vale 1,90 x 10^{-28} kg.

a) Qual é o momento do múon em relação ao referencial do laboratório?
b) E em relação ao referencial do feixe de elétrons?

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma_p mu$$

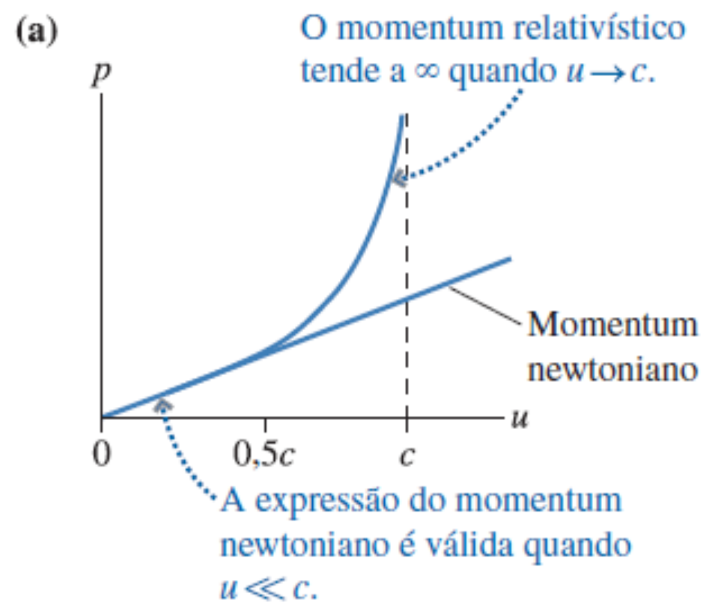
R:a): γ_p = 3,20, p = 1,73 x10^{-19} kg m/s

b): γ'_p = 3,66 , p = -2,01 x10^{-19} kg m/s

Novamente, por que não se pode andar mais rápido que a luz

$$P_{Newtoniano} = mu = m\frac{dx}{dt}$$

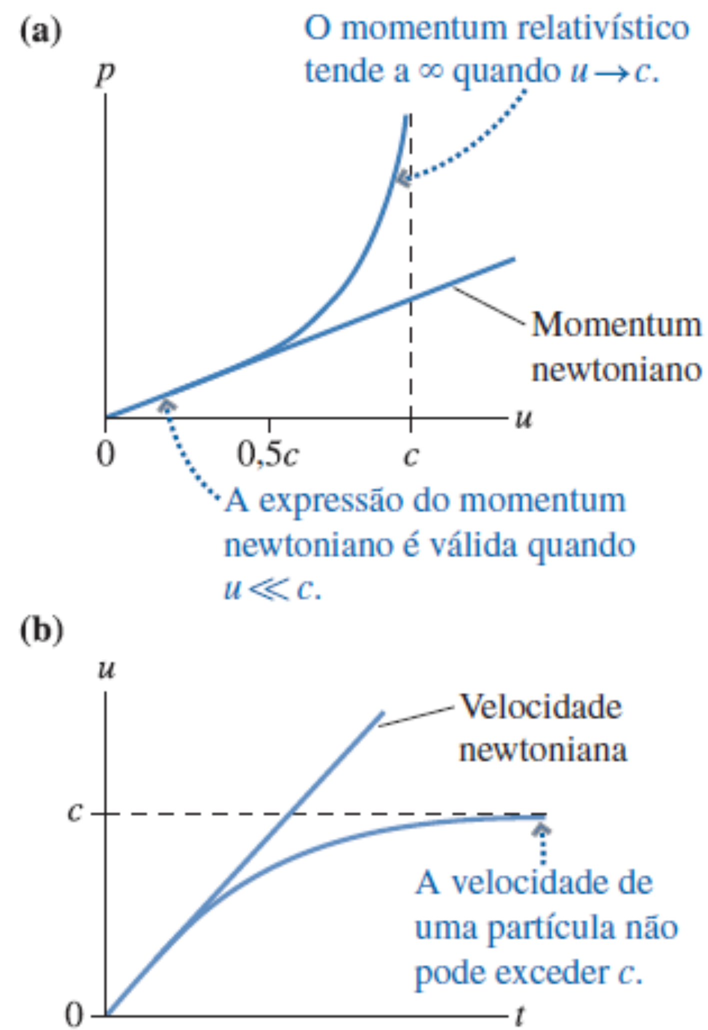
$$P_{Relativistico} = \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma_p mu$$



Novamente, por que não se pode andar mais rápido que a luz

$$P_{Newtoniano} = mu = m\frac{dx}{dt}$$

$$P_{Relativistico} = \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma_p mu$$



Força constante (F = dp/dt = cte) não produz aceleração constante !!

F ≠ m a !

Energia e Momento linear relativísticos

Forma relativística para a **Energia** de uma partícula livre

$$E_{Newtoniano} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$\boxed{E_{Relativistico} = \gamma_p mc^2}$$

Justificativa 1: para $u << c$

$$E_{Relativistico} \simeq mc^2\left(1 + \frac{u^2}{2c^2}\right) = \boxed{mc^2} + E_{Newtoniano}$$

Energia de repouso $\equiv E_0$
(existe mesmo qdo u =0)

Energia e Momento linear relativísticos

Forma relativística para a **Energia** de uma partícula livre

$$E_{Newtoniano} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$\boxed{E_{Relativistico} = \gamma_p mc^2}$$

Justificativa 2: considere 1 partícula se movendo de (x, t) para (x + dx, t + dt) em um ref. *S.* Vamos transformar as expressões P_{relat} e E_{relat} acima para um ref. *S'* :

$u\gamma_p$

$$\frac{mc}{d\tau}\,dx' = \frac{mc}{d\tau}\gamma\,(dx - v\,dt)$$

γ_p

$$\frac{mc^2}{d\tau}\,dt' = \frac{mc^2}{d\tau}\gamma\,(dt - v\,dx/c^2)$$

$\Rightarrow$

$$P'_{relat} = \gamma\,(P_{relat} - vE_{relat}/c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma\,(E_{relat} - vP_{relat})$$

Transformações de Lorentz
para momento e energia

Energia e Momento linear relativísticos

Forma relativística para a **Energia** de uma partícula livre

$$E_{Newtoniano} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$E_{Relativistico} = \gamma_p mc^2$$

Justificativa 2: considere 1 partícula se movendo de (x, t) para (x + dx, t + dt) em um ref. *S*. Vamos transformar as expressões P_{relat} e E_{relat} acima para um ref. *S'* :

Para um sistema de *n* partículas, essas transformações continuam valendo para cada partícula, e também para o momento e energia **totais** do sistema

$$P'_{relat} = \gamma\,(P_{relat} - vE_{relat}/c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma\,(E_{relat} - vP_{relat})$$

Transformações de Lorentz para momento e energia

Energia e Momento linear relativísticos

Conclusão: se, num dado referencial *S* observarmos que um sistema satisfaz

$$P^{i}_{relat} = P^{f}_{relat} \quad \text{e} \quad E^{i}_{relat} = E^{f}_{relat}$$

então um observador no ref. *S'* também observará que

$$P'^{i}_{relat} = P'^{f}_{relat} \quad \text{e} \quad E'^{i}_{relat} = E'^{f}_{relat}$$

Para um sistema de *n* partículas, essas transformações continuam valendo para cada partícula, e também para o momento e energia **totais** do sistema

$$P'_{relat} = \gamma\,(P_{relat} - vE_{relat}/c^2)$$

$$E'_{relat} = \gamma\,(E_{relat} - vP_{relat})$$

Transformações de Lorentz para momento e energia

Energia e Momento linear relativísticos

Conclusão: se, num dado referencial *S* observarmos que um sistema satisfaz

$$P^{i}_{relat} = P^{f}_{relat} \quad \text{e} \quad E^{i}_{relat} = E^{f}_{relat}$$

então um observador no ref. *S'* também observará que

$$P'^{i}_{relat} = P'^{f}_{relat} \quad \text{e} \quad E'^{i}_{relat} = E'^{f}_{relat}$$

Com essas definições de *P e E,* a conservação de momento e energia torna-se uma propriedade física que **independe da escolha do referencial inercial**, obedecendo assim ao Princípio da Relatividade

Energia e Momento linear relativísticos

Relação ligando momento e energia para 1 partícula

$$P_{Relat} = \gamma_p m u \qquad E_{Relat} = \gamma_p m c^2$$

Invariante em qq ref. inercial

Em particular, no ref. que acompanha a partícula: $s = c\, d\tau$

$$\frac{m^2c^2}{(d\tau)^2} s^2 = \frac{m^2c^2}{(d\tau)^2} c^2 (dt)^2 - \frac{m^2c^2}{(d\tau)^2} (dx)^2$$

$$m^2c^4 = E^2_{relat} - P^2_{relat} c^2$$

Energia e Momento linear relativísticos

Relação ligando momento e energia para 1 partícula

$$P_{Relat} = \gamma_p m u \qquad E_{Relat} = \gamma_p m c^2$$

Invariante em qq ref. inercial

Em particular, no ref. que acompanha a partícula: $s = c\,d\tau$

$$\frac{m^2c^2}{(d\tau)^2}s^2 = \frac{m^2c^2}{(d\tau)^2}c^2(dt)^2 - \frac{m^2c^2}{(d\tau)^2}(dx)^2$$

$$E_{relat} = \sqrt{m^2c^4 + P_{relat}^2c^2}$$

Vale em qualquer referencial inercial

Energia e Momento linear relativísticos

Prova da invariância da conservação do momentum *e energia* relativísticos

Partículas com vel. u_j no ref S

no ref. S $\quad p = \sum_j \frac{m_j u_j}{\sqrt{1 - u_j^2/c^2}} \equiv \sum_j \gamma_j m_j u_j$ onde m_j é a massa de repouso da partícula j.

e $\gamma_j = \frac{1}{\sqrt{1 - u_j^2/c^2}}$

no ref. S', a vel. é $u'_j = \frac{u_j - v}{1 - \frac{u_j v}{c^2}}$

então $\quad p' = \sum_j \frac{m_j u'_j}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_j}{c^2}}} = c^2 \sum_j \frac{m_j \left[u_j - v\right]}{c^2 - u_j v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u'^2_j}{c^2}}}$

Energia e Momento linear relativísticos

então $p' = \sum_j \frac{m_j u'_j}{\sqrt{1-\frac{u'^2_j}{c^2}}} = c^2 \sum_j \frac{m_j [u_j - v]}{c^2 - u_j v} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2_j}{c^2}}}$

como:

$$\gamma'_j = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2_j}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\cancel{c^2}}\frac{(u_j-v)^2 c^{\cancel{4}\,2}}{(c^2-u_j v)^2}}} = \frac{c^2-u_j v}{\sqrt{(c^2-u_j v)^2 - c^2(u_j-v)^2}} = \frac{c^2-u_j v}{\sqrt{(c^2-u_j^2)(c^2-v^2)}}$$

então: $p' = c^2 \sum_j \frac{m_j [u_j - v]}{\cancel{c^2 - u_j v}} \cdot \frac{\cancel{c^2 - u_j v}}{\sqrt{(c^2-u_j^2)(c^2-v^2)}} = \gamma \sum_j \gamma_j m_j [u_j - v]$

$$\boxed{p' = \gamma\left(p - \left(\sum_j \gamma_j m_j\right) v\right) = \gamma\left(p - \frac{Ev}{c^2}\right)}$$

Da mesma forma: $\boxed{E' = \sum_j \gamma'_j m_j c^2 = \gamma \sum_j \gamma_j m_j (c^2 - u_j v) = \gamma\left[E - pv\right]}$

Energia e Momento linear relativísticos

∴ Se, após evolução temporal, o sistema de partículas satisfizer $\begin{cases} p_i = p_f \\ E_i = E_f \end{cases}$ no ref. S, então no ref. S′ temos

$$p_i' = \gamma\left[p_i - \frac{E_i v}{c^2}\right] = \gamma\left[p_f - \frac{E_f v}{c^2}\right] = p_f' \; !$$

e $E_i' = \gamma\left[E_i - p_i v\right] = \gamma\left[E_f - p_f v\right] = E_f' \; !$

Com essa redefinição de p e E, a conservação de momento e energia é invariante pelas Trans. de Lorentz!